Mathematische Problemlösungsstrategien

Uwe Nowak

17. – 19. Februar 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Färbungsbeweise

1.1 Einführung

Färbungsbeweise sind meistens dann zu verwenden, wenn zu zeigen ist, dass eine bestimmte ebene Fläche nicht mit aus Quadraten zusammengesetzten Steinen (z.B. Tetrominos, Dominosteine) zu bedecken ist oder ein bestimmter Raum nicht mit aus Würfeln zusammengesetzten Steinen zu füllen ist.

Die meisten Lösungen haben folgendes Schema: Die Fläche wird so mit einem Muster gefärbt, dass Aussagen über das Muster zu machen sind, das ein bestimmter Stein bedeckt. Danach wird ein Widerspruch zwischen dem Muster der Fläche und dem Muster, das ein Stein bedeckt, hergeleitet.

Aufgabe: Es ist unmöglich, ein Schachbrett, bei dem zwei diagonal gegenüberliegende Ecken entfernt wurden (siehe Abbildung 1), mit 31 1×2 Dominosteinen zu bedecken.

Lösung: Diese Aufgabe ist sehr anschaulich, weil das Schachbrett bereits gefärbt ist. Nun ist eine Aussage über das Muster zu machen, das von einem Dominostein bedeckt wird. Da jedes Feld von 4 andersfarbigen Feldern umgeben ist, bedeckt jeder Dominostein ein weißes und ein schwarzes Feld. Da aber beide weggelassen Ecken schwarz waren, hat das Brett 32 weiße und 30 schwarze Felder. Somit müsste einer der Dominosteine 2 weiße Felder bedecken. Aus diesem Widerspruch folgt unmittelbar die Behauptung.

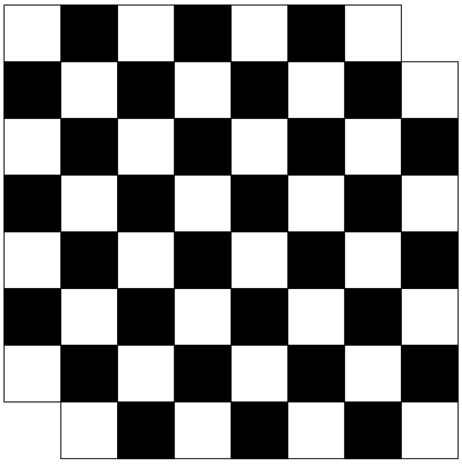


Abbildung 1: Schachbrett

1.2 Aufgaben

In den Aufgaben werden folgende Tetrominos verwendet:

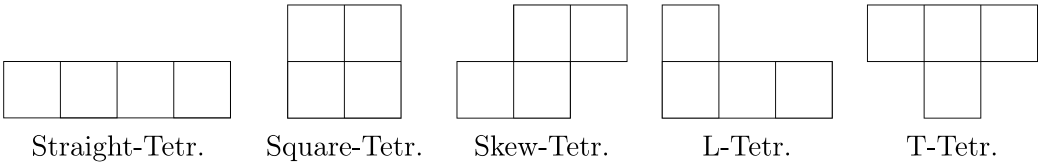


Abbildung 2: Bezeichnung der verwendeten Tetrominos

1. Eine rechteckige Fläche ist mit Straight-Tetrominos und Square-Tetrominos bedeckt. Ein Stein zerbricht und es ist nur noch ein Stein der anderen Art vorhanden. Zeige, dass die Fläche nicht mit den vorhanden Steinen bedeckt werden kann.

2. Ist es möglich, aus den fünf Tetrominos ein Rechteck zu formen?

3. Ein 10×10 Schachbrett kann nicht mit 25 T-Tetrominos bedeckt werden.

4. Ein 8×8 Schachbrett kann nicht mit 15 T-Tetrominos und einem Square-Tetromino bedeckt werden.

5. Für welches $n \in \mathbb{N}$ kann man ein $n \times n$ Schachbrett, bei dem alle 4 Ecken entfernt wurden, mit L-Tetrominos bedecken.

6. Ist es möglich, einen $10 \times 10 \times 10$ Quader mit $1 \times 1 \times 4$ Quader auszufüllen.

7. Ein $a \times b$ Rechteck kann nur dann mit $1 \times n$ Steinen bedeckt werden, wenn n Teiler von a oder von b ist.

8. Für welche $n \in \mathbb{N}$ kann ein $(2n + 1) \times (2n + 1)$ Schachbrett, bei dem eine Ecke entfernt wurde, mit 2×1 Steinen bedeckt werden, so dass die Hälfte der Steine horizontal liegen?

9. Auf den 5 in Abbildung 3a gezeigten Kisten steht jeweils auf der Oberseite ein T. Sie werden durch Rollen über ihre Kanten in die in Abbildung 3b gezeigte Formation gebracht. Welche Kiste stand ursprünglich in der Mitte.

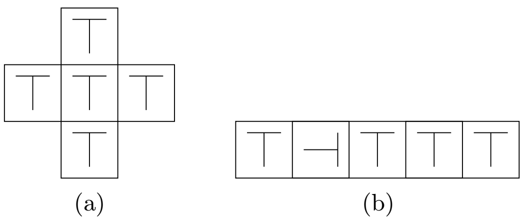


Abbildung 3: Die Anordnung der Kisten in Aufgabe 9

10. Auf einem Feld eines 5×5 Quadrates steht -1, auf den anderen 24 Feldern $+1$. Nur durch Inversion der Vorzeichen von $a \times a$ Feldern innerhalb des 5×5 Feldes wird erreicht, dass auf allen Feldern $+1$ steht. Auf welchen Feldern kann -1 gestanden haben?

11. Ein 7×7 Quadrat ist mit acht 3×1 Steinen und einem 1×1 Stein bedeckt. An welcher Stelle liegt der 1×1 Stein?

12. Gibt es einen Weg, der jeden der Knotenpunkte in Abbildung 4 genau einmal schneidet?

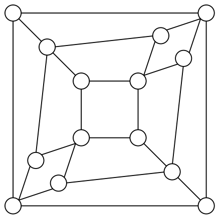


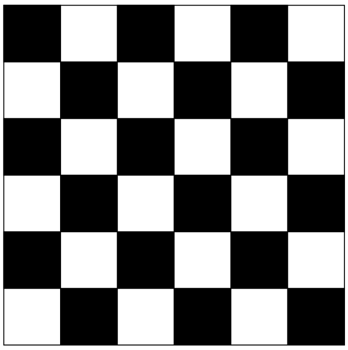
Abbildung 4: Der Graph zu Aufgabe 12

13. Können 53 $1 \times 1 \times 4$ Steine in ein $6 \times 6 \times 6$ Quader gepackt werden?

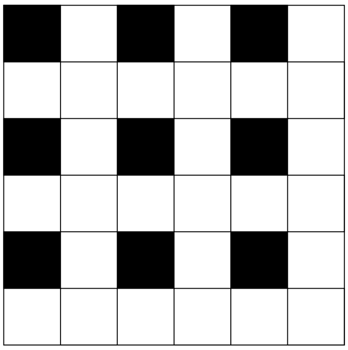
14. Ein 6×6 Quadrat ist mit 1×2 Steinen bedeckt. Zeige, dass es mindesten eine Linie gibt, die das Quadrat, aber keinen Stein schneidet.

15. Jedes Element einer 25×25 Matrix ist entweder $+1$ oder -1. Wenn a_i das Produkt aller Zahlen der i-ten Zeile und b_j das Produkt aller Zahlen der j-ten Spalte ist, dann gilt für die Summe
$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \cdots + a_{25} + b_{25} \neq 0.$$

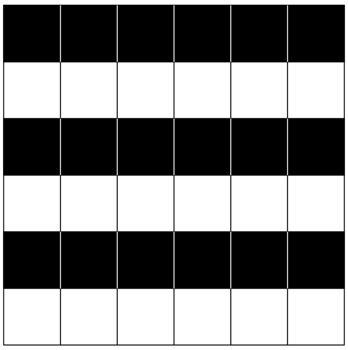
1.3 Lösungen



(a)



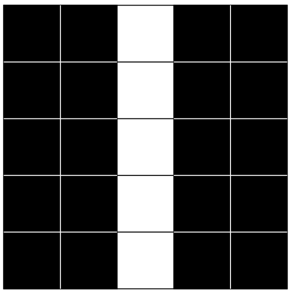
(b)



(c)

1	2	3	...	n	1
1	2	3	...	n	1
1	2	3	...	n	1
...	...	...	...	...	...
1	2	3	...	n	1
1	2	3	...	n	1

(d)



(e)

1	3	2	1	3	2	1
2	1	3	2	1	3	2
3	2	1	3	2	1	3
1	3	2	1	3	2	1
2	1	3	2	1	3	2
3	2	1	3	2	1	3
1	3	2	1	3	2	1

(f)

1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1

(g)

Abbildung 5: Für die Lösung verwendete Färbungen

1. Man färbe das Rechteck wie in Muster (b). Dann bedeckt ein Straight-Tetromino 0 oder 2 schwarze Felder, ein Square-Tetromino hingegen 1 schwarzes Feld. Daher können die beiden Steine nicht ausgetauscht werden.

2. Man färbe das Rechteck wie in Muster (a). Dann hat das Rechteck mit 20 Steinen 10 schwarze und 10 weiße Felder. Das T-Tetromino bedeckt 1 weißes oder 3 weiße Felder, alle anderen Steine 2 weiße Felder. Somit sind nach allen gelegten Steinen 9 oder 11 weiße Felder bedeckt.

3. Man färbe das Quadrat wie in Muster (a). Dann hat das 10×10 Schachbrett 50 weiße und 50 schwarze Felder. Jedes T-Tetromino bedeckt 1 oder 3 weiße Felder. Gibt es n T-Tetrominos, die 1 weißes Feld bedecken, so gibt es $25 - n$ T-Tetrominos, die 3 weiße Felder bedecken. Insgesamt werden also
$$n + 3 \cdot (25 - n) = 75 - 2n \neq 50$$
weiße Felder bedeckt.

4. Man färbe das Schachbrett wie in Muster (b). Dann hat das 8×8 Schachbrett 32 weiße und 32 schwarze Felder. Jedes T-Tetromino bedeckt 1 oder 3 weiße Felder, das Square-Tetromino 2 weiße Felder. Gibt es n T-Tetrominos, die 1 weißes Feld bedecken, so gibt es $15 - n$ T-Tetrominos, die 3 weiße Felder bedecken. Insgesamt werden also
$$n + 3 \cdot (15 - n) = 45 - 2n \neq 30$$
weiße Felder bedeckt.

5. $n^2 - 4$ ist durch 4 teilbar, also ist n gerade. Das genügt aber nicht. Färbt man die Fläche wie in Muster (c), dann bedeckt ein L-Tetromino 1 oder 3 weiße Felder. Da die Anzahl der weißen Felder der Fläche aber gerade ist, muss die Anzahl der L-Tetrominos gerade sein, $n - 4$ also ein Vielfaches von 8 sein. Ist n ein Vielfaches von 4, so ist n^2 ein Vielfaches von 16, $n^2 - 4$ also kein Vielfaches von 8. Somit muss n die Form $4k + 2$ haben. Das diese genügt, erkennt man einfach durch die entsprechende Konstruktion.

6. Man bezeichne die Koordinaten der einzelnen Würfel mit x, y und z (die linke untere Ecke sei $x = y = z = 0$) und Färbe jeden Würfel mit der Farbe $i = (x + y + z) \bmod 4$. Dann enthält ein $1 \times 1 \times 4$ Quader jeweils einen Würfel jeder Farbe. In der untersten Ebene ($z = 0$) sind 25,26,25,24 Würfel der Farbe 0,1,2,3 (vgl. Muster (g)). Die Farbe eine Würfels in der darrüberliegenden Ebene entspricht der um 1 erhöhten Farbe der darrunterliegenden Ebene modulo 4. Somit enthält der $10 \times 10 \times 10$ Quader $2(25 + 24 + 25 + 26) + 25 + 24 = 249$ Würfel der Farbe 0. Es gibt aber 250 solcher Würfel.

7. Ist n ein Teiler von a oder von b, so ist die Lösung trivial. Es gilt $a = qn + r$, $1 \leq r < n$ Man färbe das Rechteck wie in Muster (d). Dann gibt es $bq + b$ Felder der Farben $1, 2, 3, \ldots, r$ und bq der Farben $1, 2, 3, \ldots, n$. Jeder horizontale Stein bedeckt ein Feld jeder Farbe, jeder vertikale n Felder derselben Farbe. Nachdem alle h horizontalen Steine gelegt wurden, bleiben noch $bq + b - h$ Steine der Farben $1, 2, 3, \ldots, r$ und $bq - h$ der Farben $1, 2, 3, \ldots, n$. Es gilt also $n | bq + b - h$ und $n | bq - h$. Somit gilt $n | (bq + b - h) - (bq - h)$, also $n | b$.

8. Man färbe die Fläche wie in Muster (c), so dass die obere Zeile schwarz ist. Insgesamt gibt es $4n^2+4n$ Felder, $2n^2+3n$ schwarze und $2n^2+n$ weiße Felder. Nachdem alle n^2+n vertikalen Dominos gelegt wurden, sind noch n^2+2n schwarze Felder und n^2 weiße Felder übrig, da jeder vertikale Dominostein ein weißes und ein schwarzes Feld bedeckt. Jeder horizontale Stein bedeckt 2 weiße oder 2 schwarze Felder. Somit muss n^2 gerade sein, also auch n. Dass jedes $(4m+1)\times(4m+l)$ Feld die Bedingung erfüllt, ist durch Konstruktion unmittelbar einleuchtend.

9. Man färbe die Fläche wie in Muster (a), so dass die mittlere Kiste auf schwarz steht, die anderen 4 Kisten somit auf weiß. Es ist einleuchtend, dass eine Kiste, auf der dass T nach oben gerichtet oder um 180 Grad gedreht ist ihre Farbe beibehalten hat, eine Kiste, auf der das T schräg steht, hingegen um ihre Farbe gewechselt hat. Zum Schluss stehen alle Kisten nebeneinander, also 3 auf weiß und 2 auf schwarz oder umgekehrt. Es hat nur eine Kiste ihre Farbe gewechselt, also müssen 3 Kisten (also die erste, die dritte und die fünfte Kiste von links) auf weiß stehen. Da keine dieser Kisten ihre Farbe gewechselt hat, standen sie ursprünglich auf weiß. Die zweite Kiste von links steht auf schwarz, hat aber ihre Farbe gewechselt, stand somit ebenfalls auf weiß. Somit stand die 4. Kiste von links ursprünglich in der Mitte, da sie auf schwarz steht und ihre Farbe beibehalten hat.

10. Man färbe die Fläche wie in Muster (e). Jedes $a\times a$ Quadrat, $a>1$, bedeckt eine gerade Anzahl von schwarzen Feldern. Somit kann -1 nicht auf einem schwarzen Feld stehen, da dann die Anzahl von -1 immer ungerade, also nicht 0 ist. Wird die Färbung um 90° gedreht, gilt das gleiche. Somit muss -1 in der Mitte stehen.

    Eine Lösungsmöglichkeit, wenn -1 in der Mitte steht:

    - Invertiere das 3×3 Quadrat links unten.
    - Invertiere das 3×3 Quadrat rechts oben.
    - Invertiere das 2×2 Quadrat links oben.
    - Invertiere das 2×2 Quadrat rechts unten.
    - Invertiere das ganze 5×5 Quadrat.

11. Man färbe die Fläche wie in Muster (f). Jeder 3×1 Stein bedeckt ein Feld jeder Farbe. Es gibt 17 Einser und je 16 Zweier und Dreier. Also muss der 1×1 Stein auf einem Feld der Farbe 1 stehen. Nach einer Vierteldrehung der Färbung gilt dasselbe. Der 1×1 Stein muss somit auf einem Feld, das bei jeder Drehung des Feldes die Farbe 1 hat, also in einer der Ecken oder in der Mitte, liegen.

12. Man färbe die Punkte so mit zwei Farben, dass benachbarte Punkte unterschiedliche Farben haben (vgl. Abbildung 6). Eine Linie, die durch alle Punkte geht, muss abwechselnd durch verschiedenfarbige Punkte gehen (z. B. wswswswswswsws), also durch 7 weiße und 7 schwarze Punkte. Es gibt aber 8 weiße und 6 schwarze Punkte.

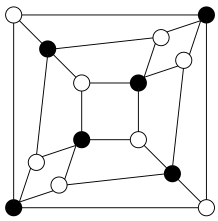


Abbildung 6: Die Knoten sind abwechselnd schwarz und weiß gefärbt.

13. Man die 27 in dem $6 \times 6 \times 6$ Würfel enthalten $2 \times 2 \times 2$ Würfel abwechselnd schwarz und weiß (vgl. Schachbrett). Dann gibt es 14 weiße 23 und 13 schwarze 23 Würfel, also 112 weiße und 104 schwarze $1 \times 1 \times 1$ Würfel. Da jeder $1 \times 1 \times 4$ Quader 2 weiße und 2 schwarze 13 Würfel ausfüllt, füllen 53 Quader 106 schwarze 13 Würfel aus. Es gibt aber nur 104 dieser Würfel.

14. Schneidet nur Stein diese Linie, so gibt es keine Möglichkeit, das Brett zu bedecken (ungerade Anzahl von Feldern auf den Seiten der Linie. Somit muss jede Linie mindestens von 2 Steinen geschnitten werden. Es gib 10 mögliche Schneidelinien, somit müssten also 20 Dominosteine vorhanden sein. Es gibt aber nur $62 = 36$, Felder, also 18 Dominosteine.

15. Das Produkt aller Elemente der Matrix ist $a_1 a_2 \cdots a_{25} = b_1 b_2 \cdots b_{25}$. Wenn $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \cdots + a_{25} + b_{25} = 0$ gelten soll, müssen gleich viele Summanden $+1$ wie -1 vorhanden seien. Gibt es n Summanden $a_i = 1$, so gibt es $25 - n$ Summanden $b_j = 1$. Da n und $25 - n$ unterschiedliche Parität haben, haben $a_1 a_2 \cdots a_{25}$ und $b_1 b_2 \cdots b_{25}$ unterschiedliche Parität. Dieses ist ein Widerspruch.

2 Ungleichungen

2.1 Einführung

Ungleichungen sind beliebte Wettbewerbsaufgaben. Diese können teilweise sehr trickreich sein, oft jedoch sind einige feste Schemen oder bekannte Ungleichungen hilfreich.

- Quadrate und Summe von Quadraten reeller Zahlen sind nicht-negativ. Das heißt für $x \in \mathbb{R}$ bzw. $x_i \in \mathbb{R}$ gilt

$$x^2 \geq 0, \tag{1}$$
$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0. \tag{2}$$

  Gleichheit gilt genau dann, wenn $x = 0$ bzw. wenn alle $x_i = 0$ sind.

- Oft verwendet wird die Ungleichungen zwischen harmonischem, arithmetischem, geometrischem und quadratischem Mittel. Seien alle $a_i > 0$, dann

$$\min(a_i) \leq \underbrace{\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots \frac{1}{a_n}}}_{\text{HM}} \leq \underbrace{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}_{\text{GM}} \leq \underbrace{\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}}_{\text{AM}} \leq \underbrace{\sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}}_{\text{QM}} \leq \max(a_i). \tag{3}$$

  Die Gleichheit gilt genau dann, wenn $a_1 = \cdots = a_n$.

  Die wichtigsten Formen dieser Ungleichung sind die Ungleichungen zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel für zwei und drei Zahlen. Seien $a, b, c \geq 0$:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \tag{4}$$
$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \tag{5}$$

  Gleichheit gilt für $a = b$ bzw. $a = b = c$.

- Sehr mächtig, jedoch auch etwas schwieriger in der Anwendung ist die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*. Seien $a = (a_1, \ldots, a_n)$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)$ Vektoren, dann besagt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|a \cdot b| \leq |a| \cdot |b|. \tag{6}$$

  Gleichheit gilt genau dann, wenn die Vektoren linear abhängig sind. Mittels Quadrieren auf beiden Seiten erhält man für reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ die Ungleichung

$$(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2). \tag{7}$$

- Sei $x > 0$. Dann gilt die Ungleichung

$$x + \frac{1}{x} \geq 2. \tag{8}$$

2.2 Aufgaben

1. Zeige, dass für beliebige reelle Zahlen x, y, z die Ungleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz.$$

   Untersuche, wann Gleichheit eintritt.

2. Zeige für $a, b, c > 0$ die Ungleichung

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

3. Zeige für $a, b > 0$ die Ungleichung

$$\sqrt[n+1]{ab^n} \leq \frac{a+nb}{n+1}.$$

4. Zeige die allgemeine Dreiecksungleichung

$$\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1+b_1)^2 + \cdots + (a_n+b_n)^2}.$$

5. Eine an einen Bach angrenzende Wiese soll rechteckig mit Draht eingezäunt werden. Es steht nur Draht der Länge l zur Verfügung. Die an den Bach grenzende Seite braucht keinen Zaun. Welches Seitenverhältnis muss die Wiese für maximalen Flächeninhalt haben.

6. Sei ein Dreieck Δ durch die Koordinatenachsen und durch eine Gerade g durch den Punkt $(1, 1)$ begrenzt. Zeige, dass für den Flächeninhalt A_Δ von Δ gilt: $A_\Delta \geq 2$.

7. Sei $x, y, z > 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Zeige $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{3}{4}$.

8. Seien $0 \leq a, b, c \leq 1$. Dann gilt

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} \leq 2.$$

2.3 Lösungen

1. Es gelten die folgenden Äquivalenzumformungen:

$$\begin{aligned} & x^2+y^2+z^2 \geq xy+xz+yz \\ \iff & 2x^2+2y^2+2z^2 \geq 2xy+2xz+2yz \\ \iff & (x^2-2xy+y^2)+(x^2-2xz+z^2)+(y^2-2yz+z^2) \geq 0 \\ \iff & (x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

   Die letzte Zeile gilt nach Ungleichung (2), des Weiteren gilt die Gleichheit genau dann, wenn $x-y=x-z=y-z=0$, also wenn $x=y=z$ gilt.

2. Wir zeigen zuerst die linke Ungleichung. Mittels $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ gilt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 &= \frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}{9} \\ &\geq \frac{(ab+bc+ca)+2ab+2bc+2ca}{9} \geq \frac{ab+bc+ca}{3} \end{aligned}$$

   Da beide Seiten nicht-negativ sind ergibt sich durch Wurzelziehen die linke Ungleichung.

   Nun zur rechten Ungleichung: Es gilt nach Ungleichung (5)

$$\frac{ab+bc+ca}{3} \geq \sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} = \sqrt[3]{a^2b^2c^2} = \left(\sqrt[3]{abc}\right)^2.$$

   Wurzelziehen auf beiden Seiten ergibt die Behauptung.

3. Dieses ist gerade die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel für $n+1$ Zahlen $a, b, \ldots, b$.

4. Da beide Seiten nicht-negativ sind, ist Quadrieren eine Äquivalenzumformung. Es gilt

$$\begin{aligned} & \sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2} \geq \sqrt{(a_1+b_1)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2} \\ \iff & a_1^2+\cdots+a_n^2+b_1^2+\cdots+b_n^2+2\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2} \\ & \qquad \geq (a_1^2+2a_1b_1+b_1^2)+\cdots+(a_n^2+2a_nb_n+b_n^2) \\ \iff & 2\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2} \geq 2a_1b_1+\cdots+2a_nb_n \\ \iff & \left(a_1^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+\cdots+b_n^2\right) \geq (a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2 \end{aligned}$$

   Die letzte Gleichung ist gerade die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (7).

5. Seien a und b die Seiten der Wiese, b die an den Bach angrenzende Seite. Dann ist die Zaunlänge $l=2a+b$ und der Flächeninhalt $A=ab$. Nach (4) gilt

$$\frac{l}{2} = \frac{2a+b}{2} \geq \sqrt{2ab} = \sqrt{2A}.$$

   Da l fest vorgegeben ist, ist A nach (4) am größten, wenn $2a=b$ ist.

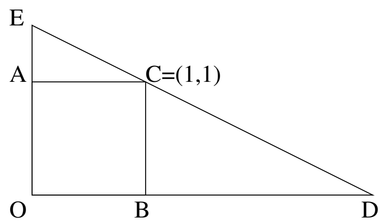


Abbildung 7: Skizze zu Aufgabe 6

6. Setze in Abbildung 7 $x = |AE|$. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke BDC und ACE ist

$$\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|BC|}{|BD|} \iff \frac{x}{1} = \frac{1}{|BD|} \iff |BD| = \frac{1}{x}.$$

Für den Flächeninhalt von $\Delta = ODE$ folgt somit aus Ungleichung (8)

$$A_\Delta = \frac{1}{2}|OE||OD| = \frac{1}{2}(1+x)\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(2+x+\frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{2}(2+2) = 2.$$

7. Indirekter Beweis: Sei $x^2+y^2+z^2 < \frac{3}{4}$. Nach der Ungleichung $GM \leq QM$ aus (3) gilt

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} < \frac{1}{2} \implies xyz < \frac{1}{8}$$

Somit folgt

$$x^2+y^2+z^2+2xyz \leq \frac{3}{4}+\frac{1}{4} < 1.$$

Widerspruch, somit muss die Annahme $x^2+y^2+z^2 < \frac{3}{4}$ falsch gewesen sein.

8. Es gilt

$$0 \leq (1-a)(1-b) = 1-a-b+ab \implies a+b \leq 1+ab.$$

Da wir o.B.d.A. $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ annehmen können, folgt weiter

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ac}+\frac{c}{1+ab} \leq \frac{a}{1+ab}+\frac{b}{1+ab}+\frac{c}{1+ab} = \frac{a+b+c}{1+ab} \leq 1+\frac{c}{1+ab} \leq 2.$$

3 Schubfachprinzip

3.1 Einführung

Das Schubfachprinzip ist ein sehr anschauliches, jedoch in Wettbewerben sehr nützliches Prinzip. Es besagt, dass wenn $n+1$ Kugeln auf n Schubfächer verteilt werden, in einem Schubfach mindestens zwei Kugeln liegen.

Etwas allgemeiner besagt das Schubfachprinzip: Werden $an+1$ Kugeln auf n Schubfächer verteilt, so liegen in mindestens einem Schubfach $a+1$ Kugeln.

Aufgabe: In einer Jahrgangsstufe mit 73 Schülern gibt es mindestens 7, die im selben Monat Geburtstag haben.

Lösung: Die 12 Monate sind die 12 Schubfächer, die 73 Schüler die zu verteilenden Kugeln. Nun ist $73 = 6 \cdot 12 + 1$, also gibt es in einem Schubfach mindestens 7 Kugeln, d.h. es gibt mindestens 7 Schüler, die im selben Monat Geburtstag haben.

Aufgabe: Auf einem $1m \times 1m$ großen Tisch sitzen 51 (punktförmige) Fliegen. Zeige, dass man in jedem Fall mit einer kreisförmigen Fliegenklatsche vom Radius $15cm$ drei Fliegen gleichzeitig erschlagen kann.

Lösung: Teile das Quadrat in 25 Quadrate mit der Seitenlänge $20cm$. Der Umkreis eines solchen Quadrats hat den Radius

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 20cm \cdot < 15cm.$$

Da es 25 Quadrate (Schubfächer) und 51 Fliegen gibt, sitzen in einem Quadrat mindestens 3 Fliegen. Diese kann man mit einem Schlag erlegen.

3.2 Aufgaben

1. Die Menge $A \subset \{1, 2, \ldots, 32\}$ habe 17 Elemente. Dann gibt es $a, b \in A$ mit $a + b = 33$.

2. Es kommen n Personen auf einen Kongress und reichen sich zu Beginn gegenseitig die Hand. Niemand schüttelt sich selbst die Hand oder jemand anderem zweimal die Hand. Zeige, dass es zu jedem Zeitpunkt immer zwei Leute mit derselben Anzahl an Handshakes gibt.

3. Unter 6 Personen kennen sich je drei Personen gegenseitig oder drei Personen gegenseitig nicht.

4. Jede Menge A mit n Elementen enthält eine Teilmenge B, so dass die Summe aller Elemente aus B durch n teilbar ist.

5. Gegeben seien 12 zweistellige Zahlen. Zeige, dass mindestens zwei Zahlen eine Differenz der Form aa (zwei gleiche Ziffern) haben.

6. Unter $n+1$ ganzen Zahlen zwischen 1 und $2n$ gibt es zwei teilerfremde Zahlen.

3.3 Lösungen

1. Es gibt 16 Mengen $\{1, 32\}, \{2, 31\}, \{3, 30\}, \dots, \{16, 17\}$. Da A 17 Elemente enthält, müssen zwei Elemente aus derselben Menge gewählt werden. Deren Summe ist 33.

2. Die Mögliche Anzahl an Handshakes beträgt $0, \dots, n-1$. Jedoch können 0 und $n-1$ nicht gleichzeitig vorkommen, dann dann eine Person allen anderen die Hand geschüttelt hätte, eine Person bisher jedoch noch niemandem. Also gibt es zu jedem Zeitpunkt n verschiedene Personen, die Anzahl der möglichen Handshakes ist jedoch nur $n-1$.

3. Sei P eine beliebige Person. Dann kennt P entweder mindestens drei andere Personen, oder sie kennt mindestens drei andere Personen nicht. Wir nehmen an, dass sie mindestens drei andere Personen kennt (der andere Fall ist analog). Falls sich diese 3 Personen untereinander alle nicht kennen, gilt die Aussage. Kennen sich zwei von Ihnen (z.B. Q und R), so kennen sich die drei Personen P, Q, R untereinander.

4. Sei $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Betrachte die n Summen a_1, $a_1 + a_2$, $\dots a_1 + \dots + a_n$. Falls eine der Summen durch n teilbar ist, haben wir die Teilmenge B gefunden. Ansonsten können die n Summen bei der Division durch n nur die $n-1$ verschiedenen Reste $1, \dots, n-1$ lassen, also lassen zwei Summen denselben Rest. Deren Differenz ist dann durch n teilbar, somit erfüllt die Differenzmenge die Bedingung für B.

5. Eine zweistellige Zahl hat genau dann die Form aa, wenn sie durch 11 teilbar ist. 12 zweistellige Zahlen können bei der Division durch 11 nur die 11 verschiedenen Reste $0, 1, \dots, 10$ lassen, also haben zwei Zahlen denselben Rest bei der Division durch 11. Deren Differenz ist durch 11 Teilbar, hat also die Form aa.

6. Wir ordnen die $n+1$ Zahlen der Größe nach: $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1} \leq 2n$. Ist für jedes j die Differenz $a_{j+1} - a_j \geq 2$, so gilt

$$a_{n+1} = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{n+1} - a_n) \geq 1 + 2 + \dots + 2 = 2n + 1.$$

Also gibt es zwei Nachbarzahlen a_j und $a_{j+1} = a_j + 1$, die teilerfremd sind.

4 Extremalprinzip

4.1 Einführung

Das Extremalprinzip ist ein sehr mächtiges, jedoch nicht immer einfach anzuwendendes Beweisverfahren. Die grundlegende Idee des Extremalprinzips ist, dass man sich ein bestimmtes Element einer Menge (welches in einem gewissen Sinn extrem, z.B. maximal oder minimal ist) heraussucht und von diesem Eigenschaften nachweist oder als Widerspruchsbeweis nachweist, dass das Element nicht extremal sein kann.

Aufgabe: Eine endliche Menge von Punkten hat die Eigenschaft, dass jede Gerade durch zwei Punkte durch einen dritten Punkt läuft. Zeige, dass alle Punkte auf einer Gerade liegen.

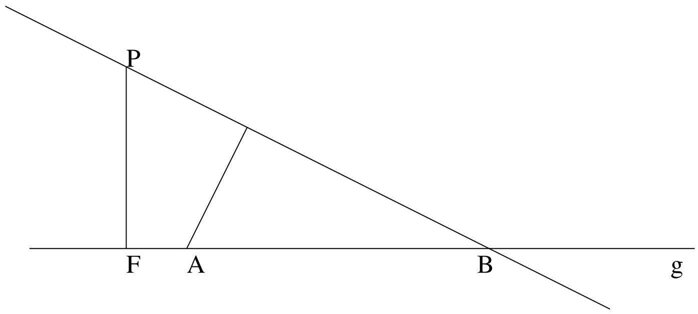


Abbildung 8: Widerspruchsbeweis: Die Strecke PF kann nicht minimal sein.

Lösung: Wir nehmen an, dass die Punkte nicht auf einer Geraden liegen. Nun wählt man eine Gerade g und einen Punkt $P \notin g$ mit der Eigenschaft, dass P und g den kleinstmöglichen Abstand haben. Sei F der Fußpunkt des Lotes von P auf g. Es gibt mindestens drei Punkte auf g, also liegen auf einer Seite von F mindestens 2 Punkte A, B. Sei o.B.d.A. der $|AF| < |BF|$. Dann ist der Abstand von A zur Geraden BP kleiner als $|FP|$, also kleiner als der Abstand von P zu g. Dieses ist ein Widerspruch, also kann es keinen solchen Punkt nicht auf der Geraden geben.

4.2 Aufgaben

1. In einem Gebiet befinden sich n Häuser und n Brunnen. Jedes Haus soll durch eine geradlinige Wasserleitung mit einem Brunnen verbunden werden. Zeige, dass dieses stets möglich ist, ohne dass zwei Wasserleitungen sich kreuzen.

2. In einer Ebene liegen n verschiedene Punkte, so dass je drei dieser Punkte ein Dreieck mit dem Flächeninhalt kleiner oder gleich 1 bilden. Zeige, dass alle Punkte in einem Dreieck mit dem Flächeninhalt kleiner oder gleich 4 liegen.

3. Es haben $2n + 1$ reelle Zahlen die Eigenschaft, dass die Summe von je n dieser Zahlen kleiner als die Summe der restlichen $n + 1$ Zahlen ist. Zeige, dass alle Zahlen positiv sind.

4. Es sind $2n + 1$ Personen in einer Ebene, so dass keine zwei Personen denselben Abstand haben. Gleichzeitig schießt jeder auf seinen nächsten Nachbarn. Zeige, dass mindestens eine Person überlebt.

5. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $n\sqrt{2}$ keine natürliche Zahl.

6. In einem unendlichen Gitter natürlicher Zahlen ist jede Zahl das arithmetische Mittel der vier Nachbarzahlen. Zeige, dass alle Zahlen gleich sind.

7. Eine Menge von S Personen, die alle mindestens einen Freund in S haben, hat folgende Eigenschaft: Haben zwei Personen dieselbe Anzahl an Freunden in S, so haben sie keinen gemeinsamen Freund. Man beweise: Es gibt eine Person mit genau einem Freund. (Hinweis: Freundschaft beruht auf Gegenseitigkeit, d.h. ist A ein Freund von B, so ist auch B ein Freund von A.)

4.3 Lösungen

1. Wähle die Verbindung der n Häuser mit n Brunnen, bei dem die Gesamtstrecke der Wasserleitungen am kürzesten ist. Wir zeigen: Dort kreuzen sich keine zwei Wasserleitungen. Denn kreuzen sich die Strecken H_1B_1 und H_2B_2 in X, dann verkürzt sich die Gesamtlänge, wenn man stattdessen die Leitungen H_1B_2 und H_2B_1 zieht. Denn es ist nach der Dreiecksungleichung

$$|H_1B_2| + |H_2B_1| < |H_1X| + |XB_2| + |H_2X| + |XB_1| = |H_1B_1| + |H_2B_2|.$$

2. Sie ABC das Dreieck mit dem maximalen Flächeninhalt $A_{ABC} \leq 1$. Ziehe die Parallelen zu den Seiten durch die gegenüberliegenden Punkte. Das so entstehende Dreieck $A'B'C'$ ist viermal so groß wie ABC, hat also einen Flächeninhalt $A_{A'B'C'} \leq 4$. Nun kann kein Punkt außerhalb dieses Dreiecks $A'B'C'$ liegen. Denn wäre z.B. D außerhalb (vergleiche Abbildung 9), so wäre $A_{ADC} > A_{ABC}$. Widerspruch.

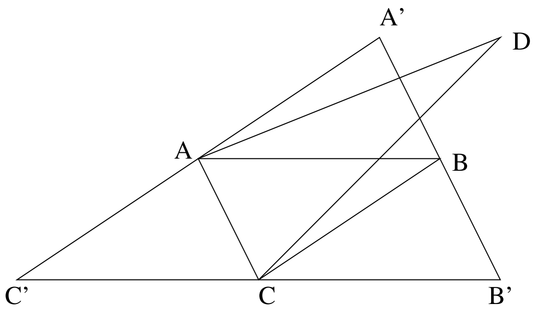


Abbildung 9: Skizze zu Aufgabe 2

3. Betrachte die n Zahlen, deren Summe S maximal ist. Wir führen eine Fallunterscheidung:
   - Falls unter diesen n Zahlen eine negative Zahl ist, müssen die übrigen $n+1$ Zahlen alle negativ sein (sonst wäre S nicht maximal). Dann ist S größer gleich der Summe beliebiger n der übrigen Zahlen, also größer als die Summe der übrigen $n+1$ Zahlen.
   - Falls unter den n Zahlen keine negative Zahl ist, müssen die anderen $n+1$ Zahlen auch positiv sein. Denn wäre einer der übrigen Zahlen negativ, so wäre die Summe der restlichen n Zahlen größer als S.

4. Seien A und B die Personen mit der kleinsten Distanz. Diese schießen aufeinander. Schießt eine weitere Person auf A oder B, so haben diese beiden Personen mindestens drei Kugeln verbraucht, es wird also eine Person überleben. Schießt keine weitere Person auf A oder B, so können wir diese beiden ignorieren und haben das Problem für $n-1$. Wiederholte Anwendung dieser Überlegung führt zu einer Situation, wo auf ein Paar drei Schüsse gefeuert werden oder zu dem Fall $n = 0$, in dem nur noch 1 Personen übrig bleibt. Für diesen Fall ist die Aussage trivial. Formal lässt sich dieser Beweis per Induktion führen.

5. Sei k die kleinste natürliche Zahl so, dass $k\sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Dann ist $(\sqrt{2}-1)k < k$ und

$$(\sqrt{2}-1)k = \sqrt{2}k - k \in \mathbb{N}.$$

Außerdem ist

$$\left((\sqrt{2}-1)k\right)\sqrt{2} = 2k - \sqrt{2}k \in \mathbb{N}.$$

Dieses ist jedoch ein Widerspruch zur Minimalität von k.

6. Seien nicht alle Zahlen gleich. Betrachte eine kleinste Zahl k, die neben einer größeren Zahl $j > k$ steht. Die übrigen Nachbarzahlen von k sind $j_1, j_2, j_3 \geq k$ (wegen der Minimalität von k). Dann ist
$$k = \frac{j + j_1 + j_2 + j_3}{4} > \frac{k + k + k + k}{4} = k.$$
Widerspruch, somit müssen alle Zahlen gleich sein.

7. Man betrachte die Person P mit den meisten Freunden in S. Die Anzahl dieser Freunde sei $n \geq 1$. Jeder dieser Freunde hat nun eine andere Anzahl an Freunden, denn sie haben ja alle den gemeinsamen Freund P. Für diese Anzahl an Freunden gibt es aber nur die n verschiedenen Möglichkeiten 1 bis n. Insbesondere gibt es also eine Person, die genau einen Freund hat.

5 Vollständige Induktion

5.1 Einführung

Das Prinzip der vollständigen Induktion ist immer dann nützlich, wenn eine Aussage für alle natürlichen Zahlen zu zeigen ist. Die Idee ist, dass man eine Aussage A in zwei Schritten beweist. Zuerst zeigt man als *Induktionsverankerung*, dass die Aussage A für $n = 1$ wahr ist. Dann macht man die *Induktionsannahme*, dass die Aussage für die Zahlen von 1 bis n gilt und zeigt im *Induktionsschritt*, dass sie dann auch für $n + 1$ gilt. Da A nun für $n = 1$ gilt, muss A auch für $n = 2$ gelten. Wenn nun A für $n = 1$ und $n = 2$ gilt, muss A auch für $n = 3$ gelten usw. Somit muss A letztendlich für jedes natürliche n gelten.

Eine anschauliche Vorstellung erhält man durch eine unendliche Reihe von Dominosteinen. Die Aussage A ist nun, dass jeder Dominostein umfällt. Nun zeigt man als Induktionsverankerung, dass der erste Dominostein umfällt und dass, falls ein Dominostein umfällt, auch sein Nachfolger umfällt. Es ist intuitiv klar, dass dann letztendlich jeder Dominostein – und stehe er noch so weit hinten – umfallen wird.

Aufgabe: Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Lösung: Induktionsverankerung $n = 1$: Für $n = 1$ gilt $1 = \frac{1\cdot 2}{2}$.
Induktionsschritt $n \to n + 1$: Wir nehmen als Induktionsannahme an, dass die Aussage für n gilt und wollen die Aussage für $n + 1$ zeigen. Das bedeutet, wir setzen die Gleichung

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

als richtig voraus und wollen die Gleichung

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

zeigen. Es gilt nun die Gleichungskette

$$1+2+\cdots+n+(n+1) = (1+2+\cdots+n)+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Somit haben wir die Aussage für $n + 1$ gezeigt. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.

5.2 Aufgaben

Einige Aufgaben beziehen sich auf die Fibonacci-Zahlen. Diese sind als rekursive Folge definiert durch

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \text{ für } n \geq 1.$$

1. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung gilt
$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Auf einer Rundstrecke sind n gleiche Autos verteilt. Alle Autos zusammen enthalten gerade genügend Benzin, um eine Runde zu Fahren. Zeige, dass es ein Auto gibt, was eine vollständige Runde fahren kann, wenn es unterwegs das Benzin der anderen stehenden Fahrzeuge einsammelt.

3. In einer Ebene sind n Kreise. Zeige, dass es möglich ist, die Ebene mit zwei Farben so zu färben, dass keine Flächen mit derselben Farbe aneinander stoßen.

4. Sei $a \in \mathbb{R}$ so, dass $a + a^{-1} \in \mathbb{Z}$ ist. Dann gilt für jedes $n \in N$ die Aussage $a^n + a^{-n} \in \mathbb{Z}$.

5. Es gilt $F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$.

6. Es gilt $F_1 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$.

7. Zeige $2^n > 5n + 1$ für $n \geq 5$.

8. Zeige $6|n^3 - n$ für $n \geq 2$.

9. Beweise die geometrische Summenformel: Für $n \neq 1$ gilt
$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

10. Finde den Fehler in dem folgenden Induktionsbeweis zur Aussage: Je n beliebige reelle Zahlen sind gleich, d.h. für jede Menge $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}$ gilt $a_1 = \ldots = a_n$.

    Beweis: Die Induktionsverankerung für $n = 1$ ist offensichtlich (denn dort wird ja nichts behauptet). Als Induktionsschritt wissen wir die Aussage für Mengen mit n Elementen. Sei nun eine Menge $\{b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}\} \subset \mathbb{R}$. Dann gilt für die Menge $\{b_1, \ldots, b_n\}$ nach Induktionsvoraussetzung $b_1 = \cdots = b_n$ und für die Menge $\{b_2, \ldots, b_{n+1}\}$ die Aussage $b_2 = \cdots = b_{n+1}$. Zusammen erhalten wir $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = b_{n+1}$, also die Behauptung für $n + 1$ Elemente.

5.3 Lösungen

1. Die Induktionsverankerung für $n = 1$ ist klar. Als Induktionsschritt erhält man

$$\begin{aligned}1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.\end{aligned}$$

2. Als Induktionsanfang für $n = 1$ ist klar, dass ein Auto, welches genügend Benzin für eine Runde hat, diese Runde auch ohne einsammeln von Benzin fahren kann. Sei nun die Aussage für n Autos bewiesen und $n+1$ Autos auf der Strecke. Dann gibt es mindestens ein Auto A, was sein Nachfolgeauto B erreichen kann (könnte kein Auto das nächste erreichen, hätten alle Autos zusammen nicht genügend Benzin für eine Runde). Nun sei A zu B gefahren und habe dessen Benzin. Wir entfernen B. Dann gibt es n Autos, von denen nach Induktionsvoraussetzung ein Auto die Runde fahren kann. Ist dieses A, so schafft A auch in der Ursprungssituation die Runde. Ist dieses ein anderes Auto, so schafft dieses ebenfalls auch bei $n+1$ Autos die Runde, denn es hat überall gleichviel Benzin wie im Fall mit n Autos und von A nach B noch zusätzlich das Benzin von A.

3. Für einen Kreis ist dieses offensichtlich wahr. Sei nun die Aussage für n Kreise wahr und $n+1$ Kreise in der Ebene gegeben. Wir entfernen einen Kreis und färben die so entstehende Ebene mit n Kreisen gemäß der Aufgabenstellung. Dann fügen wir den $n + 1$-ten Kreis hinzu und invertieren alle Farben im Inneren des Kreises. Die so entstehende Färbung erfüllt wieder die Bedingungen.

4. Für $n = 1$ ist die Aussage nach Voraussetzung wahr. Als Induktionsschritt nach $n + 1$ erhält man

$$a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}} = \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^n + \frac{1}{a^n}\right) - \left(a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}}\right) \in \mathbb{Z}.$$

5. Für $n = 1$ ist $F_0F_2 = 0 = F_1^2 - 1$ wahr. Als Induktionsschritt auf $n + 1$ erhält man

$$\begin{aligned}F_nF_{n+2} &= F_n(F_n + F_{n+1}) = F_n^2 + F_nF_{n+1} = F_n^2 + (F_{n+1} - F_{n-1})F_{n+1} \\ &= F_n^2 + F_{n+1}^2 - F_{n-1}F_{n+1} = F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}.\end{aligned}$$

6. Für $n = 1$ erhalten wir $F_1 = 1 = 2 - 1 = F_3 - 1$. Als Induktionsschritt ist

$$F_1 + \ldots + F_n + F_{n+1} = F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+3} - 1.$$

7. Hier ist der Induktionsanfang natürlich für $n = 5$ zu führen. Dort ist $2^5 = 32 > 26 = 5 \cdot 5 + 1$. Als Induktionsschritt von n nach $n + 1$ ergibt sich

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2(5n+1) = 5n + (5n+2) > 5n + 6 = 5(n+1) + 1.$$

8. Für $n = 2$ gilt sicherlich $6|6 = 2^3 - 2$. Als Induktionsschritt erhält man

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = n^3 - n + 3(n^2 + n).$$

   Nun ist $n^3 - n$ nach Induktionsvoraussetzung durch 6 teilbar. Da $n^2 + n$ gerade ist, ist auch $3(n^2 + n)$ durch 6 teilbar. Somit gilt die Behauptung.

9. Für $n = 0$ ist die Aussage offensichtlich wahr. Als Induktionsschritt von n nach $n + 1$ erhält man

$$1+x+\cdots+x^n+x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{(1-x)x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}.$$

10. Das Problem ist der Induktionsschritt von $n = 1$ nach $n = 2$. Denn dort wissen wir für die Menge $\{b_1, b_2\}$ nach Induktionsvoraussetzung, dass b_1 gleich sich selbst und b_2 gleich sich selbst ist. Wir können die letzte Gleichungskette des Beweises nicht aufstellen, da es kein solches Bindeglied $b_2 = \cdots = b_n$ gibt.

6 Teleskopprinzip

6.1 Einführung

Das Teleskopprinzip bedeutet, dass man einen langen Ausdruck (z.B. eine Summe oder ein Produkt) so umformt, dass sich Summanden oder Faktoren im inneren des Ausdrucks gegenseitig aufheben. So lässt sich eine lange Summe bzw. ein langes Produkt zu einem kurzen Ausdruck vereinfachen.

Aufgabe: Die k-te Dreieckszahl ist definiert durch $d_k = \frac{k(k+1)}{2}$. Berechne den Ausdruck

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_n}.$$

Lösung: Es gilt mittels Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Der Ausdruck vereinfacht sich somit zu

$$\begin{aligned}
\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_n} &= \frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)} \\
&= 2\left(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

6.2 Aufgaben

1. Berechne für $n \in \mathbb{N}$ den Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2-1}}.$$

2. Zeige die Aussage

$$\sqrt{2006} > \frac{1}{2\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{2\sqrt{2006}} > \sqrt{2007} - 1.$$

3. Zeige die Ungleichung

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 999999}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 1000000} < \frac{1}{1000}.$$

6.3 Lösungen

1. Mittels der dritten binomischen Formel erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}.$$

   Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2-1}}\\ &=\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\cdots+\left(\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2-1}\right)\\ &=\sqrt{n^2}-\sqrt{1}=n-1.\end{aligned}$$

2. Es gilt die Ungleichung

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k}-\sqrt{k-1}.$$

   Damit erhält man die eine Ungleichung durch

$$\frac{1}{2\sqrt{1}}+\cdots+\frac{1}{2\sqrt{2006}} < \left(\sqrt{1}-\sqrt{0}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\cdots+\left(\sqrt{2006}-\sqrt{2005}\right)=\sqrt{2006}$$

   und die andere Ungleichung durch

$$\frac{1}{2\sqrt{1}}+\cdots+\frac{1}{2\sqrt{2006}} > \left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\cdots+\left(\sqrt{2007}-\sqrt{2006}\right)=\sqrt{2007}-1.$$

3. Wir setzen den linken Ausdruck der Ungleichung gleich z. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}z^2 &= \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdots 999999\cdot 999999}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdots 1000000\cdot 1000000}\\ &=\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdots\frac{999999^2}{1000000^2}\\ &<\frac{1^2}{2^2-1^2}\cdot\frac{3^2}{4^2-1^2}\cdot\frac{5^2}{6^2-1^2}\cdots\frac{999999^2}{1000000^2-1^2}\\ &=\frac{1\cdot 1}{1\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 3}{3\cdot 5}\cdot\frac{5\cdot 5}{5\cdot 7}\cdots\frac{999999\cdot 999999}{999999\cdot 1000001}\\ &=\frac{1}{1000001}<\frac{1}{1000000}\end{aligned}$$

Literatur

[1] *Problem-Solving Strategies*, Arthur Engel, Springer-Verlag, 1991

[2] *Drei Problemlösungsstrategien*, Andreas Volker, 13.06.2005

[3] *Mathe ist cool*, Holger Reeker und Eike Müller, 2000

[4] *Mathe ist cool junior*, Fabian Meier, Cornelsen-Verlag, 2003

[5] *Schnupperkurs: Ausgewählte Methoden zur Aufgabenlösung*, Dr. N. Grinberg, Universität Karlsruhe, Sommersemester 2005