

# Seminarvortrag: Klassifizierungssatz für geschlossene Flächen

Uwe Nowak

Mittwoch, 28.05.2003

## Vorbemerkungen

Im Folgenden verwenden wir folgende Bezeichnungen:

**Fläche** Eine Fläche ist eine zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeit.

**Triangulierung** Eine Triangulierung einer kompakten Fläche  $S$  ist eine endliche Familie kompakter Untermengen  $\{T_1, \dots, T_n\}$ , die  $S$  überdecken und homeomorph zu Dreiecken  $\{T'_1, \dots, T'_n\}$  in  $\mathbb{R}^2$  sind.

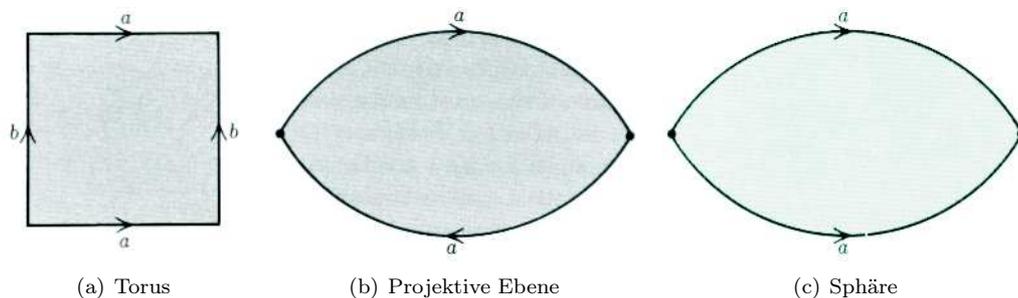


Abbildung 1: Polygondarstellung von Torus, projektiver Ebene und Sphäre

	Objekt	zusammenhängende Summe von $n$ Objekten
Torus	$aba^{-1}b^{-1}$	$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$
Projektive Ebene	$aa$	$a_1a_1\dots a_na_n$
Sphäre	$aa^{-1}$	$aa^{-1}$

Tabelle 1: Symbole für Torus, Sphäre und projektive Ebene

## Der Klassifizierungssatz

**Klassifizierungssatz** Jede geschlossene Fläche ist homeomorph zu genau einer der folgenden Mengen:

- einer 2-Sphäre
- zusammenhängende Summe von Tori
- zusammenhängende Summe von projektiven Ebenen

Wir beweisen nur die Existenz einer Darstellung, nicht ihre Eindeutigkeit. Beweisidee: Sei  $S$  eine geschlossene Fläche. Wir beweisen:  $S$  ist homeomorph zu einem der oben dargestellten Polygone mit paarweiser Identifizierung der Kanten.

### Schritt 1: $S$ in eine kompakte Kreisscheibe mit paarweiser Identifizierung von Randsegmenten transformieren

Es gibt zu  $S$  eine Triangulierung  $\{T_1, \dots, T_n\}$  so, dass jedes Dreieck  $T_i$  mindestens eine Ecke  $e_i$  mit einem der Dreiecke  $T_1, \dots, T_{i-1}$  gemeinsam hat.

Beweis: Die Existenz einer Triangulierung ist aus dem vorherigen Vortrag bekannt. Sei nun  $T_1$  ein beliebiges Dreieck. Wähle als  $T_2$  ein Dreieck, das eine Ecke mit  $T_1$  gemeinsam hat, als  $T_3$  ein Dreieck, das eine Ecke mit  $T_1$  oder  $T_2$  gemeinsam hat und allgemein als  $T_i$  ein Dreieck, das eine Ecke mit einem der Dreiecke  $T_1, \dots, T_{i-1}$  gemeinsam hat.

Können wir diesen Vorgang im  $k$ -ten Schritt nicht fortsetzen, so haben wir zwei Menge von Dreiecken  $\{T_1, \dots, T_k\}$  und  $\{T_{k+1}, \dots, T_n\}$  so dass kein Dreieck der ersten Menge eine Ecke oder Kante mit einem Dreieck der zweiten Ecke gemeinsam hat. Dann wäre  $S$  aber nicht zusammenhängend. Widerspruch.

Mit dieser Aussage und geeigneter Wahl der Dreiecke  $T_1, \dots, T_n$  sowie Ecken  $e_2, \dots, e_n$  konstruieren wir nun ein Polygonmodell für  $S$  in der euklidischen Ebene. Dazu wählen wir zu jedem  $T_i$  ein homeomorphes Dreieck  $T'_i \subset \mathbb{R}^2$ . Nun identifizieren wir die Kanten und Ecken der  $T'_i$  entsprechend den Kanten und Ecken der ursprünglichen Triangulierung, kleben also die Dreiecke zusammen. Das Resultat ist homeomorph zu einer Kreisscheibe.

Beweis: Es ist offensichtlich, dass die zusammenhängende Summe zweier kompakter Kreisscheiben eine kompakte Kreisscheibe ist. Weiter ist jedes Dreieck homeomorph zu einer Kreisscheibe. Nun kleben wir, beginnend mit dem ersten  $T'_1$  die Dreiecke in aufsteigender Reihenfolge zusammen und erhalten in jedem Schritt ein Polygon, was homeomorph zu einer Kreisscheibe ist. Somit folgt die Behauptung per Induktion.

### 2. Schritt: Elimination von zusammenhängenden Kanten des ersten Typs

Schreiben wir nun das Symbol des Polygonmodells auf (z.B.  $aa^{-1}bcbc^{-1}$ ), so kommen dort zu identifizierende Kantenpaare mit gleichen und mit verschiedenen Exponenten vor.

Wir bezeichnen im Folgenden ein Kantenpaar als:

- Paar ersten Typs, wenn beide Exponenten unterschiedlich sind
- Paar zweiten Typs, wenn beide Exponenten gleich sind

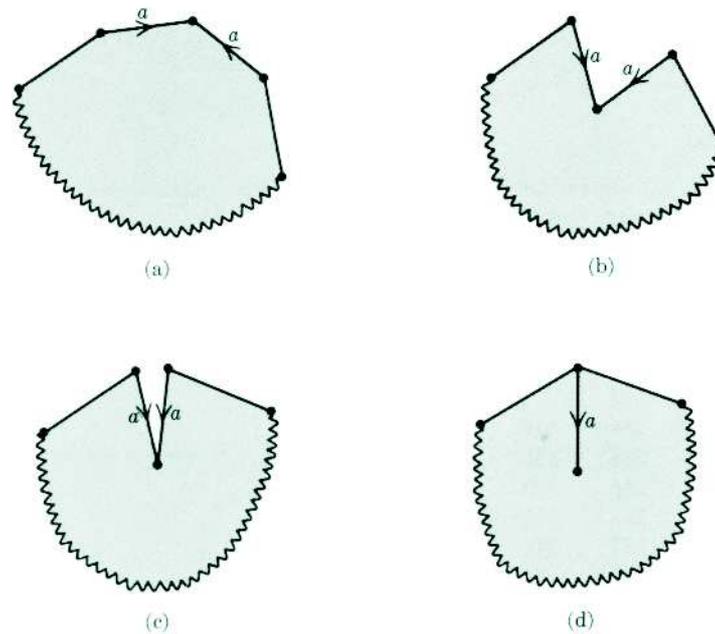


Abbildung 2: Elimination zusammenhängender Kanten des ersten Typs (Schritt 2)

Besteht das Polygon aus noch mindestens 4 Kanten, so können alle zusammenhängenden Kantenpaare des ersten Typs nach der in Abbildung 2 dargestellten Methode eliminiert werden.

Lässt sich dieser Vorgang nicht weiter fortsetzen, so sind alle zusammenhängenden Kantenpaare ersten Typs eliminiert oder wir erhalten ein Polygon mit nur noch 2 Seiten. Dieses hätte die Form  $aa$  oder  $aa^{-1}$ , wäre also entweder homeomorph zu einer Sphäre oder zu einer projektiven Ebene. Dann wäre der Beweis abgeschlossen.

### 3. Schritt: Transformation des Polygons, so dass alle Ecken mit demselben Punkt identifiziert werden.

Wir definieren nun eine Äquivalenzrelation zwischen den Punkten, die miteinander identifiziert werden, fassen alle Ecken, die mit demselben Punkt identifiziert werden, zu einer Äquivalenzklasse zusammen. Dann ist es möglich, das Polygon in ein solches zu verwandeln, bei dem alle Ecken in der selben Äquivalenzklasse liegen.

Denn unter der Annahme, dass es mindestens zwei Äquivalenzklassen gibt, kann man alle Ecken sukzessive in die Ecken einer Äquivalenzklasse verwandeln: Seien dazu Ecken der Klassen  $P$  und  $Q$  vorhanden. Ist aus Klasse  $P$  nur noch eine Ecke vorhanden, so muss an dieser Stelle ein Kantenpaar ersten Typs enden. Dieses ist nach Schritt 2 aber bereits eliminiert. Sind zwei oder mehr Ecken aus Klasse  $P$  vorhanden, so führen wir den in Abbildung 3 dargestellten Schritt aus:

Da Schritt 2 ausgeführt ist, werden die Seiten  $a$  und  $b$  nicht miteinander identifiziert. Dann kann man entlang der mit  $c$  bezeichneten Linie schneiden und die beiden mit  $a$  bezeichneten Kanten verkleben. Das neue Polygon besitzt eine Ecke weniger aus  $P$  und eine mehr aus  $Q$ .

Nach diesem Schritt führt man Schritt 2 erneut aus, daraufhin wieder Schritt 3, solange

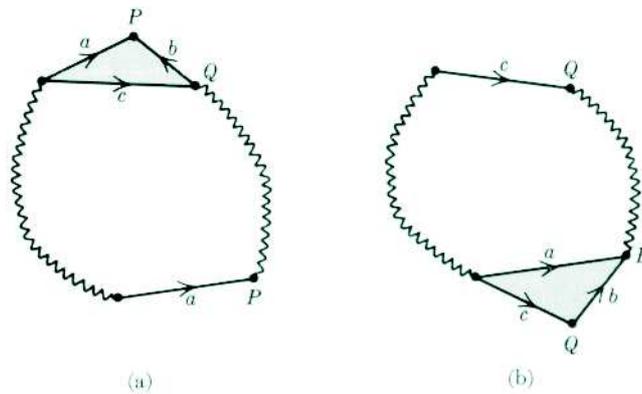


Abbildung 3: Umwandlung einer Ecke in eine Ecke einer anderen Äquivalenzklasse (Schritt 3)

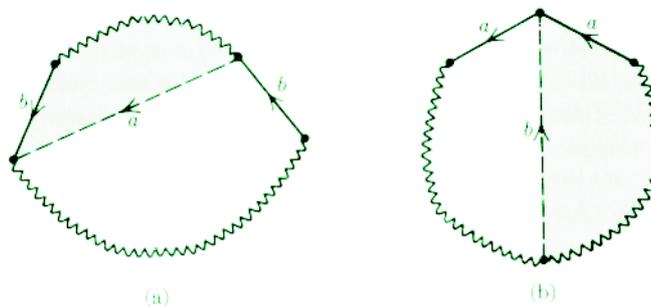


Abbildung 4: Kantenpaare vom Typ zwei miteinander verbinden (Schritt 4)

bis nur noch Ecken einer Äquivalenzklasse vorhanden sind.

**Schritt 4: Jedes Kantenpaar zweiten Typs miteinander verbinden**

Angenommen, wir haben ein Kantenpaar zweiten Typs, das nicht miteinander verbunden ist. Dann schneiden wir entlang der in Abbildung 4(a) gestrichelten Linie  $a$  und kleben entlang  $b$  zusammen, wie in Abbildung 4(b) dargestellt.

Sind nach sukzessiver Zusammenführung aller Kanten des zweiten Typs keine Kantenpaare ersten Typs mehr vorhanden, so hat das Polygon ein Symbol der Form  $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n$ , ist also zusammenhängende Summe von  $n$  projektiven Ebenen.

**Schritt 5: Kantenpaare ersten Typs**

Gibt es noch mindestens ein Kantenpaar  $c$  ersten Typs, so gibt es noch ein weiteres Kantenpaar  $d$  ersten Typs, so dass diese sich voneinander trennen, das Polygonsymbol also die Form  $c \dots d \dots c^{-1} \dots d^{-1} \dots$  hat. Denn wäre dieses nicht der Fall, so hätte das Polygon die in Abbildung 5 dargestellte Gestalt.

Wichtig ist, dass  $A$  und  $B$  wegen Schritt 4 jeweils aus einer Folge von Kantenpaaren zweiten Typs bestehen. Jede Kante aus  $A$  ist somit mit einer anderen Kante aus  $A$  identifiziert, jede Kante aus  $B$  mit einer Kante aus  $B$ . Dieses ist jedoch ein Widerspruch dazu,

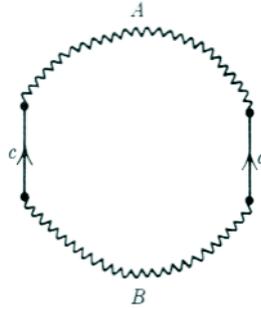


Abbildung 5: Kantenpaar ersten Typs

dass wegen Schritt 3 die Ecken der mit  $c$  bezeichneten Kanten miteinander identifiziert werden.

Nehmen wir also an, es existieren zwei Kantenpaare ersten Typs, die sich voneinander trennen. Nun soll das Polygon so transformiert werden, dass die vier Kanten dieser beiden Paare aufeinander folgen. Dieses geschieht nach dem in Abbildung 6 dargestellten Verfahren.

Wir schneiden entlang  $c$  und kleben entlang  $b$  zusammen. Es ergibt sich (b). Wir schneiden nun entlang  $d$  und klebe entlang  $a$  zusammen um (c) zu erreichen. Dann führen wir dieses Verfahren fort bis alle Kantenpaare ersten Typs zu zusammenhängenden Vierergruppen der Form  $cdc^{-1}d^{-1}$  transformiert sind.

Sind keine weiteren Kanten zweiten Typs vorhanden, hat das Symbol des Polygons die Form  $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$ , ist also zusammenhängende Summe von  $n$  Tori.

### Schritt 6: Verbleibende Polygone mit Kantenpaaren beiden Typs

Es bleibt der Fall, das noch Kantenpaare ersten und zweiten Typs vorhanden sind. Dann sind alle Kantenpaare von Typ zwei verbunden (nach Schritt 4) und Kantenpaare vom Typ eins in Zweierpaaren der Form  $cdc^{-1}d^{-1}$  zusammen (nach Schritt 5). Dieser Fall ergibt sich daraus, dass die zusammenhängende Summe eines Torus und einer projektiven Ebene homeomorph zu der direkten Summe von drei projektiven Ebenen ist:

Beweis: Der Beweis verläuft nach dem in Abbildung 7 dargestellten Verfahren:

- In Bild (a) ist das Modell der direkten Summe drei projektiver Ebenen.
- (a) $\Rightarrow$ (b): Bilde die Summe der ersten beiden projektiven Ebenen.
- (b) $\Rightarrow$ (c): Schneide die Summe entlang der Linie d und klebe entlang b zusammen.
- (c) $\Rightarrow$ (d): Bilde die Summe der so entstandenen Kleinschen Flasche und der letzten projektiven Ebene.
- (d) $\Rightarrow$ (e): Schneide entlang e und klebe entlang a zusammen.
- (e) $\Rightarrow$ (f): Schneide entlang f und klebe entlang c zusammen.
- (f) $\Rightarrow$ (g): Das so entstandene Sechseck ist zusammenhängende Summe aus Torus und projektiver Ebene.

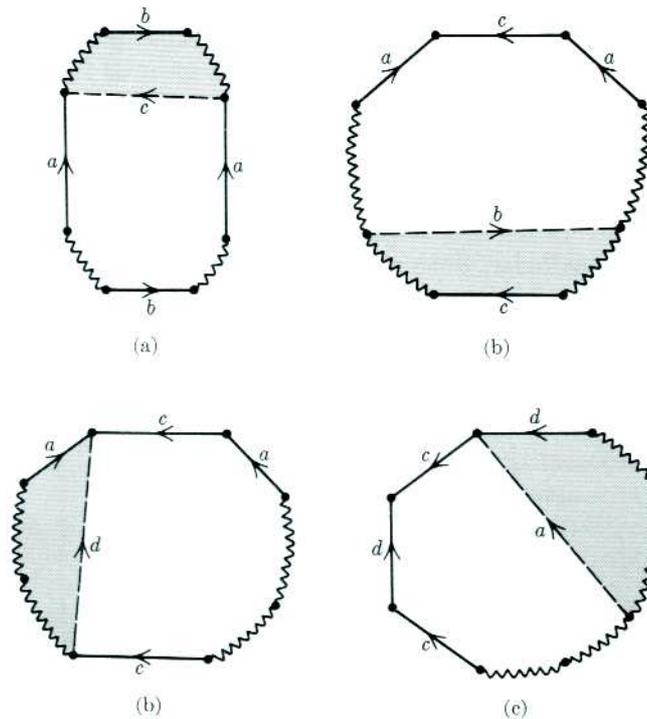


Abbildung 6: Zusammenführung getrennter Kanten ersten Typs (Schritt 5)

Daraus folgt die Behauptung. Denn wenn nach Schritt 5 das Polygon noch  $m > 0$  Kantenpaare zweiten Typs und  $n > 0$  Kantenquadrupel bestehend aus zwei Kantenpaaren ersten Typs besitzt, die sich voneinander trennen, dann ist  $S$  die zusammenhängende Summe von  $m$  projektiven Ebenen und  $n$  Tori, also homeomorph zur direkten Summe von  $m + 2n$  projektiven Ebenen.

## Literatur

MASSEY, W.S.: *Algebraic Topology: An Introduction*. Springer Verlag, 1967.

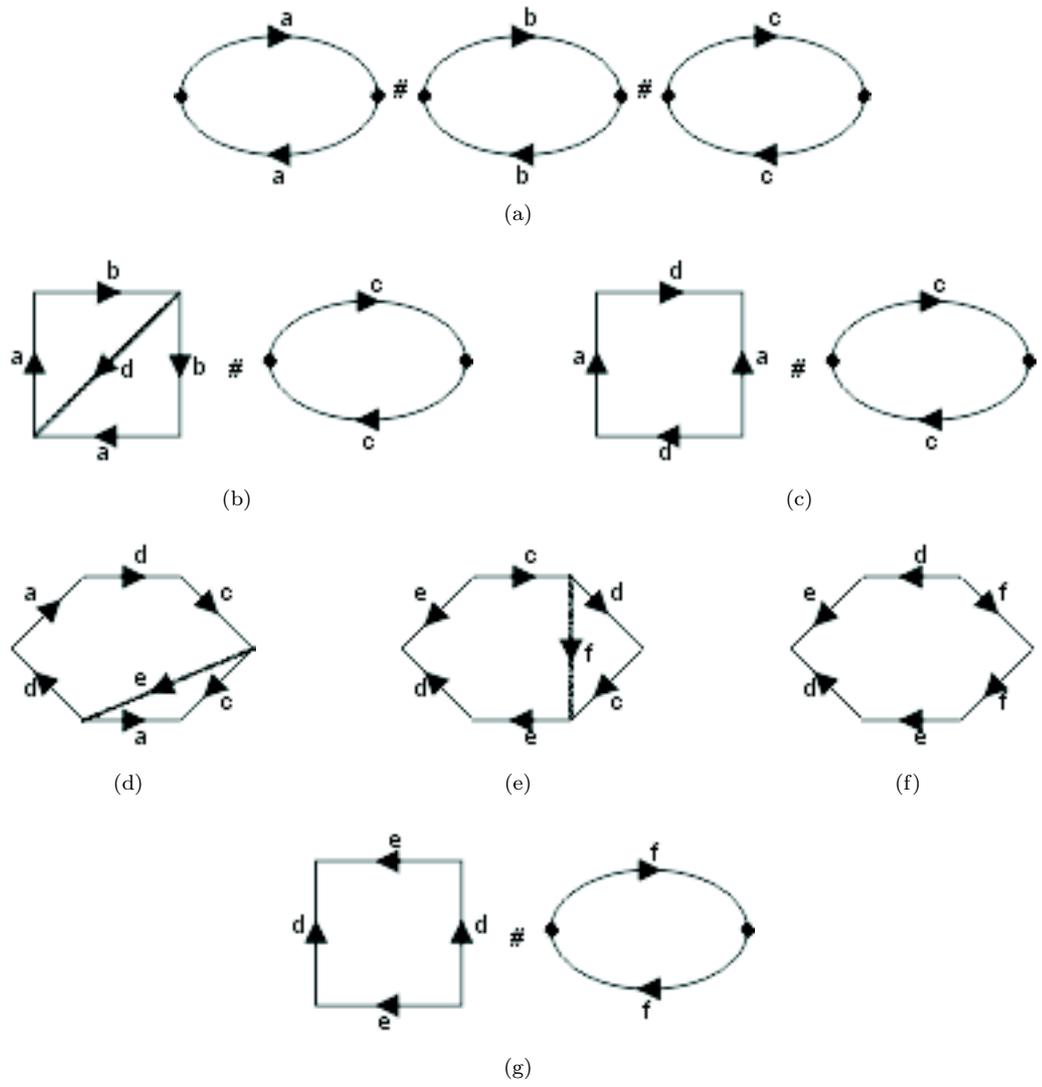


Abbildung 7: Die zusammenhängende Summe aus Torus und projektive Ebene ist homöomorph zur direkten Summe dreier projektiver Ebenen (Schritt 6)