Universität Siegen
Fachbereich Mathematik

Seminar über Markovketten

Sommersemester 2003

Dozent

- Dr. Edgar Kaufmann

Seminarteilnehmer

- Tobias Kegel
- Alexander Luke
- Uwe Nowak

1 Übergangswahrscheinlichkeiten höherer Ordnung und Zerlegung des Zustandsraumes

1.1 Definition und allgemeine Eigenschaften

Sei im folgenden

- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W-Raum
- $S \neq \emptyset$ abzählbar (o.B.d.A. $S = \{0, \ldots, m\}$ oder $S = \mathbb{N}_0$)
- $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to (S, \mathbb{P}(S)), i \in \mathbb{N}_0$ ZV
- $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ stochastischer Prozess in diskreter Zeit auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Zustandsraum S

Definition 1 (Stochastische Matrix). *Die Matrix*

$$\pi = (p_{ij})_{i,j \in S} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

heißt stochastische Matrix, falls jede Zeile $p_{i\cdot}$ eine Zufallsdichte auf S definiert, d.h. $p_{ij} \geq 0$ und $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$

Definition 2 (Markovkette). *$\{X_n, n \geq 0\}$ heißt Markovkette mit Startverteilung $\{a_k\}$ und Übergangsmatrix $\pi = (p_{ij})_{i,j \in S}$, falls*

$$P\{X_0 = k\} = a_k \quad \text{für } K \in S \tag{1}$$

und $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j$ mit $P\{X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\} > 0$

$$P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = p_{ij} \tag{2}$$

Satz 3 (Markoveigenschaft). *(i) Mit $P\{X_0 \in B_0, \ldots, X_{n-1} \in B_{n-1}, X_n = i\} > 0$ gilt:*

$$P(X_{n+1} = j | X_0 \in B_0, \ldots, X_{n-1} \in B_{n-1}, X_n = i) = p_{ij}$$

(ii) Insbesondere gilt

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}$$

Beweis: Sei $Z = (X_0, \ldots, X_{n-1})$ und $P\{X_n = i\} > 0$.
Mit $B = B_0 \times \ldots \times B_{n-1}$ und $M := \{z \in B | P\{X_n = i, Z = z\} \neq 0\}$ gilt:

$$\begin{aligned}
&P(X_{n+1} = j | X_0 \in B_0, \ldots, X_{n-1} \in B_{n-1}, X_n = i) \\
&= \frac{1}{P\{X_n = i, Z \in B\}} \cdot P\{X_{n+1} = j, X_n = i, Z \in B\} \\
&= \frac{1}{P\{X_n = i, Z \in B\}} \cdot \sum_{z \in B} P\{X_{n+1} = j, X_n = i, Z = z\} \\
&= \frac{1}{P\{X_n = i, Z \in B\}} \cdot \sum_{z \in M} \frac{P\{X_{n+1} = j, X_n = i, Z = z\}}{P\{X_n = i, Z = z\}} \cdot P\{X_n = i, Z = z\} \\
&= \frac{1}{P\{X_n = i, Z \in B\}} \cdot \sum_{z \in M} p_{ij} \cdot P\{X_n = i, Z = z\} \\
&= \frac{1}{P\{X_n = i, Z \in B\}} \cdot p_{ij} \sum_{z \in B} \cdot P\{X_n = i, Z = z\} \\
&= \frac{1}{P\{X_n = i, Z \in B\}} \cdot p_{ij} \cdot P\{X_n = i, Z \in B\} = p_{ij}
\end{aligned}$$

Somit gilt insbesondere

$$P(X_{n+1} = j|X_n = i) = P(X_{n+1} = j|Z \in S^n, X_n = i) = p_{ij}$$

Bemerkung 4 (Interpretation der Markoveigenschaft). *Die Markoveigenschaft bedeutet, dass bei Kenntnis der Gegenwart die Zukunft nicht mehr von der Vergangenheit abhängt.*

Satz 5 (Kettenregel für bedingte Wahrscheinlichkeiten). *Seien $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ mit $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$. Dann gilt*

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Beweis über Vollständige Induktion. Induktionsanfang für $n = 1$ und $n = 2$ ist klar.
Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}) &= P((A_1 \cap \ldots \cap A_n) \cap A_{n+1}) \\
&\overset{(IV)}{=} P(A_{n+1}|A_1 \cap \ldots \cap A_n) \cdot P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \\
&\overset{(IV)}{=} P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_{n+1}|A_1 \cap \ldots \cap A_n)
\end{aligned}$$

Satz 6 (Produktformel für Markovketten). *Für eine Markovkette $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Startverteilung $\{a_k\}$ und Übergangsmatrix $(p_{ij})_{i,j\in S}$ gilt für beliebiges $k \geq 0$ und $i_0, \ldots i_k \in S$:*

$$P\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_k = i_k\} = a_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{k-1} i_k} \tag{3}$$

Umgekehrt: Für eine Dichte $\{a_k\}$, eine Übergangsmatrix $(p_{ij})_{i,j\in S}$ gilt: Erfüllt $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ für alle $k \geq 0$ und alle $i_0, \ldots i_k \in S$ die Bedingung (3), so ist $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette.

Beweis: Sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette.
Fall 1: $P\{X_0 = i_0, \ldots, X_{k-1} = i_{k-1}\} > 0$. Dann gilt nach der Kettenregel

$$\begin{aligned}
P\{X_0 = i_0, \ldots, X_k = i_k\} &= P\{X_0 = i_0\} \prod_{j=1}^{k} P(X_j = i_j|X_0 = i_0, \ldots, X_{j-1} = i_{j-1}) \\
&\overset{(2)}{=} a_{i_0} \prod_{j=1}^{k} p_{i_{j-1} i_j} = a_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{k-1} i_k}
\end{aligned}$$

Also ist (3) erfüllt.
Fall 2: $P\{X_0 = i_0, \ldots, X_{k-1} = i_{k-1}\} = 0$. Setze

$$n := \inf\{j \geq 0 | P\{X_0 = i_0, \ldots, X_j = i_j\} = 0\}$$

Falls $n = 0$ ist $a_{i_0} = 0$ und Behauptung (3) gilt. Ansonsten ist nach Definition von n

$$P\{X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}\} > 0$$

Somit folgt nach (2)

$$p_{i_{n-1} i_n} = P(X_n = i_n|X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}) = \frac{P\{X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n\}}{P\{X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}\}} = 0$$

und daraus ergibt sich die Behauptung (3).
Umgekehrt: Sei $\{a_i\}$ Dichte, $(p_{ij})_{i,j\in S}$ Übergangsmatrix und (3) für alle $k \geq 0$ und alle $i_0, \ldots i_k \in S$ erfüllt. Mit $k = 0$ gilt (1).

Weiter gilt (2), denn mit $P\{X_0 = i_0, \dots, X_{k-1} = i_{k-1}\} > 0$ ist

$$\begin{aligned} P(X_k = i_k | X_0 = i_0, \dots, X_{k-1} = i_{k-1}) &= \frac{P\{X_0 = i_0, \dots, X_{k-1} = i_{k-1}, X_k = i_k\}}{P\{X_0 = i_0, \dots, X_{k-1} = i_{k-1}\}} \\ &= \frac{a_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{k-2} i_{k-1}} p_{i_{k-1} i_k}}{a_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{k-2} i_{k-1}}} = p_{i_{k-1} i_k} \end{aligned}$$

Somit ist $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette.

Beispiel 7 (Random Walk). *Seien $\{X_n, n \geq 1\}$ iid und für $k \in \mathbb{Z}$ sei $P\{X_n = k\} = a_k$. Dann ist durch*

$$S_0 = 0, \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

eine Markovkette definiert.

Begründung

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = j | S_0 = i_0, \dots, S_n = i_m) &= P(S_n + X_{n+1} = j | S_0 = i_0, \dots, S_n = i_m) \\ &= P\{i_n + X_n = j\} = P\{X_n = j - i_n\} = a_{j - i_n} =: p_{i_n j} \end{aligned}$$

Beispiel 8 (Symmetrischer Random Walk mit absorbierendem Rand in 0 und m). *Seien $\{X_n, n \geq 1\}$ iid mit $P\{X_n = -1\} = P\{X_n = 1\} = \frac{1}{2}$. Dann ist durch*

$$S_0 =\in \{1, \dots, m-1\}, \qquad S_{n+1} = \begin{cases} S_n & S_n \in \{0, m\} \\ S_n + X_n & S_n \in \{1, \dots, m-1\} \end{cases}$$

eine Markovkette definiert. Diese hat die Übergangsmatrix

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2 Übergangwahrscheinlichkeiten höherer Ordnung

Satz 9 (Verallgemeinerte Markoveigenschaft). *Für $n, m \in \mathbb{N}_0$, $k_1, \dots k_m, i_1, \dots i_{n-1}, i \in S$ und $P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) > 0$ gilt:*

$$\begin{aligned} &P(X_{n+1} = k_1, \dots, X_{n+m} = k_m | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) \\ &= P(X_{n+1} = k_1, \dots, X_{n+m} = k_m | X_n = i) \\ &\quad = P(X_1 = k_1, \dots, X_m = k_m | X_0 = i) \qquad (\textit{falls zusätzlich } P\{X_0 = i\} \neq 0) \end{aligned}$$

Beweis: Setze $i_n = i$ und $i_{n+j} = k_j$, $j = 1, \dots, m$.
Dann gilt

$$\begin{aligned} &P(X_{n+1} = k_1, \dots, X_{n+m} = k_m | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) \\ &= \frac{P\{X_0 = i_0, \dots, X_{n+m} = i_{n+m}\}}{P\{X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\}} \\ &\overset{(\text{Satz } 5)}{=} \frac{P\{X_0 = i_0\} \cdot P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) \cdot \ldots \cdot P(X_{n+m} = i_{n+m} | X_0 = i_0, \dots, X_{n+m-1} = i_{n+m-1})}{P\{X_0 = i_0\} \cdot P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) \cdot \ldots \cdot P(X_n = i_n | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1})} \\ &= P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) \cdot \ldots \cdot P(X_{n+m} = i_{n+m} | X_0 = i_0, \dots, X_{n+m-1} = i_{n+m-1}) \\ &\overset{(\text{Satz } 3)}{=} p_{i_n i_{n+1}} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n+m-1} i_{n+m}} = p_{i k_1} \cdot p_{k_1 k_2} \cdot \ldots \cdot p_{k_{m-1} k_m} \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}
&P(X_{n+1} = k_1, \dots, X_{n+m} = k_m | X_n = i) \\
&= \frac{P\{X_n = i_n, \dots, X_{n+m} = i_{n+m}\}}{P\{X_n = i_n\}} \\
&\overset{\text{(Satz 5)}}{=} \frac{P\{X_n = i_n\} \cdot P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n) \cdot \ldots \cdot P(X_{n+m} = i_{n+m} | X_n = i_n, \dots, X_{n+m-1} = i_{n+m-1})}{P\{X_n = i_n\}} \\
&\overset{\text{(Satz 3)}}{=} p_{i_n i_{n+1}} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n+m-1} i_{n+m}} = p_{ik_1} \cdot p_{k_1 k_2} \cdot \ldots \cdot p_{k_{m-1} k_m}
\end{aligned}$$

sowie analog für $P\{X_0 = i\} \neq 0$

$$P(X_1 = k_1, \dots, X_m = k_m | X_0 = i) = p_{ik_1} \cdot p_{k_1 k_2} \cdot \ldots \cdot p_{k_{m-1} k_m}$$

Daher gilt die Behauptung.

Bemerkung 10 (Matrizenpotenzen). *Sei $\pi = (p_{ij})_{i,j \in S}$ Matrix. Seien $\pi^n = (p_{ij}^{(n)})_{i,j \in S}$ die Potenzen von π, π^0 die Identität. Dann gilt $\pi^{n+1} = \pi^n \cdot \pi = \pi \cdot \pi^n$ und somit*

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj} = \sum_{k \in S} p_{ik} p_{kj}^{(n)}$$

Außerdem ist wegen $\pi^{n+m} = \pi^n \cdot \pi^m$:

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$

Satz 11 (Übergangswahrscheinlichkeiten höherer Ordnung). *Für alle $n \geq 0$ und $i, j \in S$ gilt:*

$$P(X_n = j | X_0 = i) = p_{ij}^{(n)}$$

Beweis durch vollständige Induktion: Der Fall $n = 0$ ist klar, $n = 1$ folgt nach Satz 3.
Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = j | X_0 = i) &= \frac{P\{X_{n+1} = j, X_0 = i\}}{P\{X_0 = i\}} \\
&= \sum_{k \in S} \frac{P\{X_{n+1} = j, X_1 = k, X_0 = i\}}{P\{X_0 = i\}} \\
&= \sum_{k \in S} P(X_{n+1} = j | X_1 = k, X_0 = i) \cdot \frac{P\{X_1 = k, X_0 = i\}}{P\{X_0 = i\}} \\
&\overset{\text{(Satz 9)}}{=} \sum_{k \in S} P(X_n = j | X_0 = k) \cdot \frac{P\{X_1 = k, X_0 = i\}}{P\{X_0 = i\}} \\
&\overset{(IV)}{=} \sum_{k \in S} p_{ik} p_{kj}^{(n)} = p_{ij}^{(n+1)}
\end{aligned}$$

Satz 12 (Unbedingte Wahrscheinlichkeiten). *Für die unbedingten Wahrscheinlichkeiten $a_j^{(n)} := P\{X_n = j\}$ gilt:*

$$a_j^{(n)} = P\{X_n = j\} = \sum_{k \in S} a_k p_{kj}^{(n)}$$

Beweis: Es ist

$$P\{X_n = j\} = \sum_{k \in S} P\{X_n = j, X_0 = k\} = \sum_{k \in S} P(X_n = j | X_0 = k) \cdot P\{X_0 = k\} = \sum_{k \in S} a_k p_{kj}^{(n)}$$

1.3 Zerlegung des Zustandsraumes

Definition 13 (Ersteintrittszeit). *Sei $\{X_n, n \geq 0\}$ eine Markovkette mit diskretem Zustandsraum S. Für $B \subset S$ ist die Ersteintrittszeit definiert als*

$$\tau_B := \inf\{n \geq 0 : X_n \in B\}$$

Weiter sei als vereinfachte Notation $\tau_j = \tau_{\{j\}}$.

Bemerkung 14. *Im Folgenden werden Wahrscheinlichkeiten behandelt, dass ein Ereignis B eintritt unter der Annahme, dass die Markovkette in einem Punkt i startet. Da dazu die Startverteilung unerheblich ist kann o.B.d.A. angenommen werden, dass $\forall i \in S$ gilt $a_i = P\{X_0 = i\} > 0$. Dann wird definiert*

$$P_i(B) := P(B|X_0 = i)$$

Definition 15 (erreichbare Zustände). *Mit $i, j \in S$ heißt j erreichbar von i (in Zeichen $i \to j$), wenn*

$$P_i\{\tau_j < \infty\} > 0$$

Satz 16 (Erreichbarkeitskriterium). *Es gilt*

$$i \to j \Leftrightarrow \exists n \geq 0 : p_{ij}^{(n)} > 0$$

Beweis:
Sei $\exists n \geq 0 : p_{ij}^{(n)} > 0$. Dann gilt:

$$\Rightarrow P_i\{\tau_j < \infty\} \geq P_i\{\tau_j \leq n\} \geq P_i\{X_n = j\} = p_{ij}^{(n)} > 0$$

Sei umgekehrt $\forall n \geq 0 : p_{ij}^{(n)} = 0$. Dann

$$\begin{aligned} P_i\{\tau_j < \infty\} &= \lim_{n\to\infty} P_i\{\tau_j \leq n\} \\ &= \lim_{n\to\infty} P_i \left\{ \bigcup_{k=0}^{n} \{X_k = j\} \right\} \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} P_i\{X_k = j\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} p_{ij}^{(k)} = 0 \end{aligned}$$

Definition 17 (kommunizierende Zustände). *Zwei Zustände $i, j \in S$ heißen kommunizierend, wenn $i \to j$ und $j \to i$ ist (in Zeichen $i \leftrightarrow j$).*

Satz 18. *Kommunikation ist eine Äquivalenzrelation auf S.*

Beweis: Reflexivität $i \leftrightarrow i$ ist wegen des Falls $n = 0$ in Satz 16 erfüllt, Symmetrie ist trivial. Zu zeigen bleibt, dass die Transitivität gilt. Dazu genügt die Transitivität der Erreichbarkeit: Sei $i \to j$ und $j \to k$. Dann gibt es nach Satz 16 ein n mit $p_{ij}^{(n)} > 0$ und ein m mit $p_{jk}^{(m)} > 0$. Somit gilt nach Bemerkung 10

$$p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{s\in S} p_{is}^{(n)} p_{sk}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0$$

Daher gilt nach Satz 16 auch $i \to k$. Analog gilt $k \to i$, also $i \leftrightarrow k$.

Bemerkung 19. *Die Kommunikation induziert eine Klasseneinteilung auf S, d.h. mit Äquivalenzklassen $C_i = \{j \in S | i \leftrightarrow j\}$ gilt:*

(i) $(i \nleftrightarrow j) \Leftrightarrow (C_i \cap C_j = \emptyset)$

(ii) $(i \leftrightarrow j) \Leftrightarrow (C_i = C_j)$

(iii) $\bigcup_{i \in S} C_i = S$

Definition 20 (Reduzibilität). *(i) Eine Markovkette heißt reduzibel, wenn sie aus mehr als einer Äquivalenzklasse besteht.*

(ii) Eine nicht reduzible Markovkette heißt irreduzibel.

Definition 21 (Geschlossenheit und Absorbtion). *Sei $C \subset S$. Dann*

(i) Die Menge C heißt geschlossen, wenn gilt

$$\forall i \in C : P_i\{\tau_{C^c} = \infty\} = 1$$

(ii) Ist $C = \{j\}$ geschlossen, so heißt der Zustand j absorbierend.

Bemerkung 22. *(i) Eine geschlossene Menge von Zuständen kann nicht mehr verlassen werden, jedoch gilt im Allgemeinen nicht, dass sie nicht erreicht werden kann.*

(ii) Äquivalenzklassen müssen nicht notwendigerweise geschlossen sein.

Satz 23 (Kriterien für Geschlossenheit und Absorbtion). *Sei $C \subset S$ und $j \in S$. Dann gilt*

(i) C ist genau dann geschlossen, wenn $\forall i \in C : \forall j \in C^c : p_{ij} = 0$

(ii) j ist genau dann absorbierend, wenn $p_{jj} = 1$

Beweis: (ii) ist ein Spezialfall von (i). Bleibt der Beweis von (i). Sei die Bedingung aus (i) erfüllt. Dann gilt sogar $\forall i \in C : \forall j \in C^c : \forall n \in \mathbb{N}_0 : p_{ij}^{(n)} = 0$.
Induktionsverankerung für $n = 0$ und $n = 1$ ist klar.
Induktionsschritt $(n \to n+1)$: Sei $i \in C, j \in C^c$. Dann ist nach Bemerkung 10:

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj} \overset{(IV)}{=} \sum_{k \in C} p_{ik}^{(n)} p_{kj} \overset{(IV)}{=} 0$$

Somit gilt für jedes $i \in C$

$$P_i\{\tau_{C^c} = n\} = P_i\{X_0 \in C, \ldots, X_{n-1} \in C, X_n \in C^c\} \leq P_i\{X_n \in C^c\} = \sum_{j \in C^c} p_{ij}^{(n)} = 0$$

und es folgt

$$P_i\{\tau_{C^c} = \infty\} = 1 - P_i\{\tau_{C^c} < \infty\} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} P_i\{\tau_{C^c} = n\} = 1 - 0 = 1$$

Ist hingegen die Bedingung aus (i) nicht erfüllt, so gibt es $i \in C, k \in C^c$ mit $p_{ik} > 0$. Dann ist

$$P_i\{\tau_{C^c} = \infty\} = 1 - P_i\{\tau_{C^c} < \infty\} \leq 1 - P_i\{\tau_{C^c} = 1\} = 1 - \sum_{j \in C^c} p_{ij} \leq 1 - p_{ik} < 1$$

Satz 24. *Ist $C \subset S$ geschlossen, so ist $(p_{ij})_{i,j \in C}$ eine stochastische Matrix auf dem Zustandsraum C.*

Beweis: Es ist $p_{ij} \geq 0$ und für alle $i, j \in C$ gilt

$$\sum_{j \in C} p_{ij} = 1 - \sum_{j \in C^c} p_{ij} = 1$$

Beispiel 25 (Deterministische monotone Markovkette). *Die deterministische monotone Markovkette ist durch $a_0 = 1$ und $p_{i,i+1} = 1$ definiert. Sie ist reduzibel und besteht aus den Äquivalensklassen $C_i = \{i\}$ mit $i \geq 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $\{n, n+1, \ldots\}$ geschlossen.*

Beispiel 26 (Symmetrischer Random Walk mit absorbierendem Rand in 0 und 3). *Vergleiche Beispiel 8. Es ist*

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Äquivalenzklassen sind $\{0\}, \{1, 2\}, \{3\}$. Die Zustände 0 und 3 sind absorbierend, können jedoch von $\{1, 2\}$ aus erreicht werden. Insbesondere ist $\{1, 2\}$ nicht geschlossen.

Beispiel 27. *Sei eine Markovkette auf $\{0, 1, 2, 3\}$ gegeben mit der Übergangsmatrix*

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Diese ist reduzibel mit den Äquivalenzklassen $\{0, 1\}, \{2, 3\}$. Beide Äquivalenzklassen sind geschlossen, d.h. eine in $\{0, 1\}$ startende Markovkette kann niemals $\{2, 3\}$ erreichen und umgekehrt.

2 Transienz und Rekurrenz

Definition 28 (rekurrent und transient). *Ein Zustand i heißt rekurrent, wenn die Kette mit Wahrscheinlichkeit 1 in endlich vielen Schritten zu i zurückkehrt, sonst heißt er transient.*

Bemerkung 29. *Mit den Ersteintreff-Zeit-Variablen ('hitting time' variables) $\tau_i(n)$ kann man das folgendermaßen formulieren:*

$$\begin{aligned} i \text{ rekurrent} &\Leftrightarrow P_i[\tau_i(1) < \infty] = 1 \\ i \text{ transient} &\Leftrightarrow P_i[\tau_i(1) = \infty] > 0 \end{aligned}$$

Definition 30 (positiv rekurrent). *Ein Zustand i heißt positiv rekurrent, wenn*

$$E_i(\tau_i(1)) < \infty$$

(wenn also nicht nur die Rückkehrzeiten fast sicher endlich sind, sondern auch der Erwartungswert der Rückkehrzeiten endlich ist)

Definition 31. *Für $n \geq 1$ sei $f_{jk}^{(n)} := P_j[\tau_k(1) = n]$ die Verteilung der Ersteintreffzeiten von k, wenn man bei j startet.*

Definition 32. *$f_{jk} := \sum_{n=0}^{\infty} f_{jk}^{(n)} = P_j[\tau_k(1) < \infty]$ ist die Wahrscheinlichkeit, von j nach k in endlich vielen Schritten zu gelangen.*

Bemerkung 33. *Insbesondere gilt, dass der Zustand i genau dann rekurrent ist, wenn $f_{ii} = 1$, und ein rekurrenter Zustand i genau dann positiv rekurrent ist, wenn*

$$m_i := E_i(\tau_i(1)) = \sum_{n=0}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} < \infty$$

Es seien ferner zwei Potenzreihen mit den Koeffizienten $f_{ij}^{(n)}$ und $p_{ij}^{(n)}$ definiert, sogenannte Erzeugenden-Funktionen:

Definition 34. *Es gelte* $0 < s < 1$. *Dann sei*

$$F_{ij}(s) := \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)} s^n$$
$$P_{ij}(s) := \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n$$

Satz 35. *(i) Für* $i \in S$ *gilt*

$$p_{ii}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)},\ n \geq 1,$$

und für $0 < s < 1$*:*

$$P_{ii}(s) = \frac{1}{1 - F_{ii}(s)}$$

(ii) Für $i \neq j$ *gilt*

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)},\ n \geq 0$$

und für $0 < s < 1$

$$P_{ij}(s) = F_{ij}(s) P_{jj}(s)$$

Beweis: (i) Da $[X_n = i] \subset [\tau_i(1) \leq n]$, gilt

$$\begin{aligned}
p_{ii}^{(n)} = P_i[X_n = i] &= \sum_{k=1}^{n} P_i[X_n = i, \tau_i(1) = k] \\
&= \sum_{k=1}^{n} P_i[\tau_i(1) = k, X_{\tau_i(1)+n-k} = i] \\
&= \sum_{k=1}^{n} P_i[\tau_i(1) = k] P_i[X_{n-k} = i] = \sum_{k=0}^{n} f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)}
\end{aligned}$$

wie zu zeigen war. Um den zweiten Teil zu erhalten, wird der Term mit s^n multipliziert und von 1 bis ∞ über n summiert:

$$\begin{aligned}
P_{ii}(s) - 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} s^n - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} s^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)} s^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)} s^n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} p_{ii}^{(n-k)} s^{n-k} \right) f_{ii}^{(k)} s^k \\
&= P_{ii}(s) \sum_{k=0}^{\infty} f_{ii}^{(k)} s^k = P_{ii}(s) F_{ii}(s)
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt:

$$\Rightarrow P_{ii}(s) - P_{ii}(s) F_{ii}(s) = 1$$
$$\Rightarrow P_{ii}(s) = \frac{1}{1 - F_{ii}(s)}$$

Der Beweis von (ii) geht ähnlich.

Bemerkung 36. *Im Prinzip bestimmen diese Gleichungen die Ersteintreffwahrscheinlichkeiten $F_{ij}(s)$ aus der gegebenen Matrix P. Aber die Relation zwischen den Erzeugenden-Funktionen bietet nicht immer ein praktikables Schema zur Berechnung der Ersteintreffwahrscheinlichkeiten. Eine Technik, die bei der Berechnung der f's hilft, wird am Ende dieses Vortrags vorgestellt.*

Satz 37. *Es gilt*

$$i \text{ ist rekurrent} \Leftrightarrow f_{ii} = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$$
$$i \text{ ist transient} \Leftrightarrow f_{ii} < 1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$$

Beweis: Es gilt

$$i \text{ rekurrent} \Leftrightarrow f_{ii} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1 \Leftrightarrow F_{ii}(1) = 1$$
$$\Leftrightarrow \lim_{s\to 1} P_{ii}(s) = \lim_{s\to 1} \frac{1}{1 - F_{ii}(s)} = \infty.$$

Mit $P_{ii}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ folgt die Behauptung.
Dieses Ergebnis hat die folgende Interpretation:

Definition 38. *Für $j \in S$ sei*

$$N_j := \sum_{n=1}^{\infty} 1_{[X_n=j]}$$

die Anzahl, wie oft der Prozess nach Zeit 0 den Zustand j erreicht, so dass für beliebige i, j gilt

$$E_i N_j = \sum_{n=1}^{\infty} E_i 1_{[X_n=j]} = \sum_{n=1}^{\infty} P_i[X_n = j] = \sum_{n=1}^{\infty} p_i j(n)$$

Bemerkung 39. *Wenn $j = i$, dann sagt Satz 37 aus, dass ein Ausgangszustand i genau dann rekurrent ist, wenn die erwartete Anzahl des Eintreffens der Kette im Zustand i unendlich ist.*

Satz 40. *Für $i, j \in S$ und nichtnegatives $k \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$P_i[N_j = k] = \begin{cases} 1 - f_{ij} & , k = 0 \\ f_{ij} f_{jj}^{k-1}(1 - f_{jj}) & , k \geq 1 \end{cases}$$

Deshalb gilt, wenn j transient ist, für alle Zustände i

$$P_i[N_j < \infty] = 1 und \quad E_i(N_j) = \frac{f_{ij}}{1 - f_{jj}} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$$

und N_j ist bezgl. P_j geometrisch verteilt:

$$P_j[N_j = k] = (1 - f_{jj})(f_{jj})^k, k \geq 0$$

*Wenn j **rekurrent** ist, dann*

$$P_j[N_j = \infty] = 1$$

und für alle i

$$P_i[N_j = \infty] = 1$$

Beweis: Für Zustände i, j gilt $P_i[N_j \geq 1] = P_i[\tau_j(1) < \infty] = f_{ij}$ Für jedes k ≥ 1 gilt

$$\begin{aligned} P_i[N_j \geq k] &= P_i[\tau_j(k) < \infty] = P_i[\tau_j(1) < \infty, \ldots, \tau_j(k) < \infty] \\ &= P_i[\tau_j(1) < \infty] P_j[\tau_j(1) < \infty]^{k-1} = f_{ij}(f_{jj})^{k-1} \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $P_j[N_j \geq k] = (f_{jj})^k$
Angenommen, j sei transient. Dann gilt

$$P_i[N_j = \infty] = \lim_{k\to\infty} P_i[N_j \geq k] = \lim_{k\to\infty} f_{ij}(f_{jj})^{k-1} = 0 \quad \text{, da } f_{jj} < 1$$

Für den Erwartungswert gilt

$$\begin{aligned} E_i(N_j) &= \sum_{j=1}^{\infty} P_i[X = j] \cdot j = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{j-1} P_i[X = j] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=m+1}^{\infty} P_i[X = j] = \sum_{m=0}^{\infty} P_i[N_j > m] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}(f_{jj})^m = \frac{f_{ij}}{1 - f_{jj}} \end{aligned}$$

Bemerkung 41. *Wenn die Kette in einem rekurrenten Zustand i startet, trifft sie den Zustand i also unendlich oft und wenn i transient ist, erreicht die Kette i nur endlich oft.*

Bemerkung 42. *Obwohl das Verhältnis der Erzeugendenfunktionen einen Zusammenhang zwischen den* $\{p_{ij}^{(n)}\}$ *und* $\{f_{ij}^{(n)}\}$ *herstellt, ist es in erster Linie von theoretischem Nutzen. Wenn man in der Praxis die Werte der* $f_{ij}^{(n)}$ *benötigt, kann man sie rekursiv berechnen.*
Für $i, j \in S$ *gilt* $f_{ij}^{(1)} = p_{ij}$*, und für* $n > 1$ *gilt*

$$\begin{aligned} & f_{ij}^{(n)} = P_i[X_1 \neq j, \ldots, x_{n-1} \neq j, X_n = j] \\ = & \sum_{k\neq j, k\in S} P_i[X_1 = k, X_2 \neq j, \ldots, x_{n-1} \neq j, X_n = j] \\ = & \sum_{k\neq j, k\in S} P_i[X_2 \neq j, \ldots, x_{n-1} \neq j, X_n = j | X_1 = k] P_i[X_1 = k] \\ = & \sum_{k\neq j} P_k[X_1 \neq j, \ldots, x_{n-2} \neq j, X_{n-1} = j] P_i[X_1 = k] \\ = & \sum_{k\neq j} p_{ik} f_{kj}^{(n-1)} \end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt also:

$$f_{ij}^{(n)} = \begin{cases} p_{ij} & n = 1 \\ \sum_{k\neq j} p_{ik} f_{kj}^{(n-1)} & , n > 1 \end{cases}$$

Dies lässt sich am Besten durch rekursive Matrizenmultiplikation ausdrücken:

Definition 43. *Sei* ${}^{(j)}P := \left({}^{(j)}p_{ik}\right)$*, mit*

$${}^{(j)}p_{ik} = \begin{cases} p_{ik} & k \neq j \\ 0 & k = j \end{cases}.$$

${}^{(j)}P$ *wird also aus* P *durch Nullsetzen der* j*-ten Spalte gewonnen. Für feste* $j \in S$ *sei der Spaltenvektor*

$$f^{(n)} = \left(f_{ij}^{(n)}, i \in S\right).$$

Dann lässt sich obige Formel für $f_{ij}^{(n)}$ schreiben als

$$f^{(n)} = \begin{cases} (p_{ij}, i \in S) & , n = 1 \\ {}^{(j)}Pf^{(n-1)} & , n > 1 \end{cases}.$$

oder auch

$$f^{(n)} =^{(j)} P^{n-1} f^{(1)}$$

Beispiel 44. *Nach dem zweiten Weltkrieg wurde in Großbritannien eine Studie über Berufsmobilität zwischen den Generationen durchgeführt. Dabei wurden drei Berufsschichten unterschieden:*
(1) Oberschicht (z.B. Manager)
(2) Mittelschicht (z.B. Angestellte und Facharbeiter)
(3) Unterschicht (z.B. ungelernte Arbeiter)
Die Übergangswahrscheinlichkeiten von Generation zu Generation wurden geschätzt als

$$P = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.48 & 0.07 \\ 0.05 & 0.70 & 0.25 \\ 0.01 & 0.50 & 0.49 \end{pmatrix}$$

Wir wollen nun $(f_{i1}^{(n)}, i = 1, 2, 3)$ berechnen (Also mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Familie aus der 'Schicht j' nach $n \geq 1$ Generationen zum ersten Mal die 'Schicht 1', also die Oberschicht, erreicht hat). Es gilt

$${}^{(1)}P = \begin{pmatrix} 0 & 0.48 & 0.07 \\ 0 & 0.70 & 0.25 \\ 0 & 0.50 & 0.49 \end{pmatrix} \quad und \quad f^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.05 \\ 0.01 \end{pmatrix}$$

Daraus erhält man

$$f^{(2)} =^{(1)} Pf^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.0247 \\ 0.0375 \\ 0.0299 \end{pmatrix}$$

$$f^{(3)} =^{(1)} Pf^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.0201 \\ 0.0337 \\ 0.0334 \end{pmatrix}$$

Um $f^{(n)}$ für größere n zu berechnen, kann man auch, anstatt erst alle $f^{(k)}$ mit $1 < k < n$ rekursiv zu berechnen, $f^{(1)}$ mit der entsprechenden Potenz von ${}^{(1)}P$ multiplizieren, z.B. ist

$$f^{(9)} = \left({}^{(1)}P\right)^8 f = \begin{pmatrix} 0.0152 \\ 0.0264 \\ 0.0279 \end{pmatrix}$$

Beispiel 45 (Einfacher Random Walk). *Seien $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ iid Zufallsvariablen mit nur zwei möglichen Werten $\{-1, 1\}$ und $P[X_1 = 1] = p = 1 - q = 1 - P[X_1 = -1]$*
(also $P[X_1 = -1] = q$, $P[X_1 = 1] = p$, $p + q = 1$).
Der einfache Random Walk Prozess wird dann durch

$$\{S_n, n \geq 0\} \; mit \, S_0 = 0, \;\; S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \;\; für \, n \geq 1$$

definiert. Wenn $p > q$ ist, dann gilt wegen dem starken Gesetz der großen Zahlen

$$P\left[\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = EX_1\right] = 1$$

Da $EX_1 = p - q > 0$, folgt

$$P\left[\lim_{n\to\infty} S_n = \infty\right] = 1$$

deshalb erreicht die Kette den Zustand 0 *fast sicher ein letztes Mal,* 0 *ist also transient. Im Fall* $p < q$ *wird die Transienz von* 0 *analog gezeigt.*
Wenn $p = q = \frac{1}{2}$*, so gilt* $p_{00}^{(2n+1)} = 0$ *(denn man kommt immer nur in einer geraden Zahl von Schritten zum Ausgangspunkt zurück) und (da der Aufenthaltsort nach* n *Schritten binomialverteilt)*

$$p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Aus der Stirling'schen Formel

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad (n\to\infty)$$

folgt

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\cdot n!} \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\cdot 4^n \qquad (n\to\infty)$$

Da

$$p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \qquad (n\to\infty)$$

gilt $\sum_{k=1}^{\infty} p_{00}^{(k)} = \infty$ *(Abschätzung mit harmonischer Reihe:* $\frac{1}{n} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$*) und deshalb ist* 0 *rekurrent.*

Diese Methoden kann man nun für den mehrdimensionalen Random Walk verallgemeinern: Sei $X_i = \left(X_i^{(1)},\ldots,X_i^{(d)}\right)$ *ein* d*-dimensionaler Random-Walk-Schritt und sei wie bisher* $S_0 = 0,\quad S_n = X_1 + \ldots + X_n\ (n\ge 1)$*. Wenn* $EX_1 := \left(EX_1^{(1)},\ldots,EX_1^{(d)}\right) \neq 0$*, dann kann wieder mit dem starken Gesetz der großen Zahlen gezeigt werden, dass* 0 *nur endlich oft erreicht werden kann. Es sei angenommen, dass die Werte von* X_i *aus* $\{-1,1\}^d$ *seien und dass* $EX_1 = 0$*, sowie dass jeder Wert aus* $\{-1,1\}^d$ *gleichwahrscheinlich ist mit*

$$P[X_1 = (i_1,\ldots,i_d)] = \frac{1}{2^d} \quad \textit{für} \quad (i_1,\ldots,i_d)\in\{-1,1\}^d.$$

Daraus folgt, dass die Komponenten $X_1^{(1)},\ldots,X_1^{(d)}$ *von* X_1 *iid Zufallsvariablen sind und symmetrische Verteilungen haben*
$(P[X_1^{(j)} = -1] = P[X_1^{(j)} = 1] = \frac{1}{2}\ ,\ j = 1,\ldots,d)$*.*
Deshalb ist $S_n = \left(S_n^{(1)},\ldots,S_n^{(d)}\right)$*, wobei* $\{S_n^{(1)}\ ,\ n\ge 0\},\ldots,\{S_n^{(d)}\ ,\ n\ge 0\}$ *unabhängige, symmetrische einfache Random Walks sind. Daraus folgt*

$$\begin{aligned} p_{00}^{(2n)} &= P[S_{2n} = 0] = P[S_{2n}^{(1)} = 0,\ldots,S_{2n}^{(d)} = 0] = (P[S_{2n}^{(1)} = 0])^d \\ &= \left(\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)^d \simeq (\pi n)^{-\frac{d}{2}} \qquad (n\to\infty) \end{aligned}$$

mit der Stirling'schen Formel. Da

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{d}{2}}}\begin{cases} =\infty & ,d=1,2\\ <\infty & ,d\ge 3\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(n)}\begin{cases} =\infty & ,d=1,2\\ <\infty & ,d\ge 3\end{cases}$$

ist beim einfachen symmetrischen Random Walk im $\mathbb{R}^d$ *der Zustand* 0 *rekurrent für* $d = 1,2$ *und transient für* $d\ge 3$*.*

3 Invariante Maße und stationäre Verteilung

Definition 46 (stochastischer Prozess). *Ein stochastischer Prozess* $\{Y_n, n\ge 0\}$ *ist stationär, falls für alle* $m\ge 0$ *und* $k\ge 0$

$$(Y_0,\cdots,Y_m) \stackrel{d}{=} (Y_k,\cdots,Y_{m+k})$$

Definition 47 (stationäre Verteilung). *Sei $\pi = \{\pi_j, j \in S\}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, dann wird diese als stationäre Verteilung einer Markovkette mit Übergangsmatrix P bezeichnet, falls gilt:*

$$\pi^t = \pi^t P, \qquad (\pi_j = \sum_{k \in S} \pi_k p_{kj}, j \in S)$$

Bemerkung 48. *Falls eine Markovkette mit einer stationären Verteilung beginnt bekommt man einen stationären Prozess. Die Verteilung der Markovkette wird mit P_π bezeichnet, wobei:*

$$P_\pi(\cdot) = \sum_{i \in S} P\{(\cdot)|X_0 = i\}\pi_i$$

Satz 49. *Gegeben sei ein stationärer Prozess P_π und ein stochastischer Prozess $\{X_n, n \geq 0\}$. Dann haben wir einen stationären stochastischen Prozess und für diesen gilt:*

(i) Für alle $n \geq 0$ und $k \geq 0$ und $i_o, \cdots, i_k, i \in S$:

$$\begin{aligned} P_\pi\left[X_n = i_o, X_{n+1} = i_1, \cdots, X_{n+k} = i_k\right] &= \pi_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{k-1} i_k} \\ &= P_\pi\left[X_0 = i_o, X_1 = i_1, \cdots, X_k = i_k\right] \end{aligned}$$

(ii) Für alle $n \geq 0$ und $j \in S$

$$P_\pi[X_n = j] = \pi_j$$

Beweis: Zu (i):

$$\begin{aligned}
&P_\pi\left[X_n = i_o, X_{n+1} = i_1, \ldots, X_{n+k} = i_k\right] \\
&= \sum_{i \in S} P\{X_n = i_0, X_{n+1} = i_1, \ldots, X_{n+k} = i_k | X_0 = i\}\pi_i \\
&= \sum_{i \in S} \frac{P\{X_0 = i, X_n = i_0, X_{n+1} = i_1, \ldots, X_{n+k} = i_k\}}{P\{X_0 = i\}}\pi_i \\
&= \sum_{i \in S} \frac{P\{X_0 = i, X_n = i_0, X_{n+1} = i_1, \ldots, X_{n+k} = i_k\}}{P\{X_0 = i; X_n = i_0; \ldots, X_{n+k-1} = i_{k-1}\}} \cdot \frac{P\{X_0 = i; X_n = i_0; \ldots, X_{n+k-1} = i_{k-1}\}}{P\{X_0 = i\}}\pi_i \\
&= \sum_{i \in S} P\{X_{n+k} = i_k | X_0 = i, X_n = i_0, \ldots, X_{n+k-1} = i_{k-1}\} \cdot \\
&\cdot P\{X_{n+k-1} = i_{k-1} | X_0 = i, X_n = i_0, \ldots, X_{n+k-2} = i_{k-2}\} \cdot \ldots \\
&\cdot P\{X_n = i_0 | X_0 = i\} \cdot \frac{P\{X_0 = i\}}{P\{X_0 = i\}} \cdot \pi_i \\
&= \sum_{i \in S} \pi_i p_{ii_0}^{(n)} p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{k-1} i_k}
\end{aligned}$$

Da eine Stationäre Verteilung vorliegt, gilt $\pi^t = \pi^t P$ und daher auch $\pi^t = \pi^t P^n$. Daraus folgt weiter

$$
\begin{aligned}
&= \pi_i p_{ii_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{k-1} i_k} \\
&= \pi_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{k-1} i_k} \\
&= \sum_{i \in S} \pi_i p_{ii_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{k-1} i_k} \\
&= \sum_{i \in S} P\{X_k = i_k | X_0 = i_0, \dots, X_{k-1} = i_{k-1}\} \cdot \cdot P\{X_{k-1} = i_{k-1} | X_0 = i_0, \dots, X_{k-2} = i_{k-2}\} \cdot \dots \\
&\cdot P\{X_o = i_0 | X_0 = i\} \cdot \frac{P\{X_0 = i\}}{P\{X_0 = i\}} \cdot \pi_i \\
&= \sum_{i \in S} \frac{P\{X_0 = i, X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_k = i_k\}}{P\{X_0 = i\}} \pi_i \\
&= \sum_{i \in S} P\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_k = i_k | X_0 = i\} \pi_i \\
&= P_\pi \left[X_0 = i_o, X_1 = i_1, \cdots, X_k = i_k\right]
\end{aligned}
$$

Zu (ii):

$$
\begin{aligned}
P_\pi[X_n = j] &= \sum_{i \in S} P\{X_n = j | X_o = i\} \pi_i \\
&= \sum_{i \in S} p_{ij}^{(n)} \pi_i \\
&= \sum_{i \in S} p_{ij} \pi_i = \pi_j
\end{aligned}
$$

Definition 50 (invariantes Maß). *Sei $\nu = \{\nu_j, j \in S\}$ eine Folge von nicht negativen Konstanten, dann wird ν als ein invariantes Maß bezeichnet, falls gilt:*

$$\nu^t = \nu^t P$$

(Wobei sich ν als ein Maß auf den Teilmengen von S vorgestellt werden kann.)

Satz 51. *(i) Sei $i \in S$ rekurrent und sei ν_j für alle $j \in S$ definiert durch*

$$\nu_j = E_i \sum_{0 \le n \le \tau_i(1)-1} 1_{[X_n = j]} = \sum_{n=0}^{\infty} P_i \left[X_n = j, \tau_i(1) > n\right]$$

dann ist ν ein invariantes Maß. (ν_j kann sich als die erwartete Anzahl von Besuchen bei j zwischen dem ersten Besuch bei i und dem nächsten Besuch bei i vorgestellt werden.)

(ii) Falls jedoch i positiv rekurrent ist, ist

$$\pi_j = \frac{\nu_j}{E_i(\tau_i(1))} = \frac{E_i \sum_{0 \le n \le \tau_{i(1)-1}} 1_{[X_n = j]}}{E_i(\tau_i(1))}$$

eine Wahrscheinlichkeitsverteilung und damit eine stationäre Verteilung.

Beweis: Zu (i)

$$\begin{aligned}
\nu_j &= E_i \sum_{0\le n\le \tau_i(1)-1} 1_{[X_n=j]} \\
&= E_i \sum_{1\le n\le \tau_i(1)} 1_{[X_n=j]} \\
&= E_i \sum_{n=1}^{\infty} 1_{[X_n=j, n\le \tau_i(1)]} (da X_o \neq i) \\
&= p_{ij} + \sum_{n=2}^{\infty} P_i[X_n = j, n \le \tau_i(1)] \\
&= p_{ij} + \sum_{k\in S, k\neq i} \sum_{n=2}^{\infty} P_i[X_n = j, n \le \tau_i(1), X_{n-1} = k] \\
&= p_{ij} + \sum_{k\in S, k\neq i} \sum_{n=2}^{\infty} P_i[X_n = j | n \le \tau_i(1), X_{n-1} = k] \cdot P_i[n \le \tau_i(1), X_{n-1} = k]
\end{aligned}$$

Es gilt $[\tau_i(1) \ge n, X_{n-1} = k] = [X_1 \neq i, \ldots, X_{n-2} \neq i, X_{n-1} = k]$ sowie $\nu_i = 1$ da $X_0 = i$ ist

$$\begin{aligned}
\nu_j &= \nu_i p_{ij} + \sum_{k\in S, k\neq i} \sum_{n=2}^{\infty} p_{kj} P_i[\tau_i(1) \ge n, X_{n-i} = k] \\
&= \nu_i p_{ij} + \sum_{k\in S, k\neq i} \sum_{m=1}^{\infty} p_{kj} P_i[\tau_i(1) \ge m+1, X_m = k] \\
&= \nu_i p_{ij} + \sum_{k\in S, k\neq i} p_{kj} E_i \sum_{m=1}^{\infty} 1_{[\tau_i(1)\ge m+1, X_m = k]} \\
&= \nu_i p_{ij} + \sum_{k\in S, k\neq i} p_{kj} E_i \sum_{m=1}^{\tau_i(1)} 1_{[X_m = k]} \\
&= \nu_i p_{ij} + \sum_{k\in S, k\neq i} p_{kj} E_i \sum_{m=o}^{\tau_i(1)} 1_{[X_m = k]} \\
&= \nu_i p_{ij} + \sum_{k\in S, k\neq i} \nu_k p_{kj} \\
&= \sum_{k\in S} \nu_k p_{kj}
\end{aligned}$$

Zu (ii): Falls i positiv rekurrent ist gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in S} \nu_j &= \sum_{j\in S} E_i \sum_{0\le n\le \tau_i(1)-1} 1_{[X_n=j]} \\
&= E_i \sum_{0\le n\le \tau_i(1)-1} \sum_{j\in S} 1_{[X_n=j]} \\
&= E_i \sum_{0\le n\le \tau_i(1)-1} 1 = E_i \tau_i(1) < \infty
\end{aligned}$$

daraus folgt:

$$\sum_{j\in S} \frac{\nu_j}{E_i(\tau_i(1))} = \sum_{j\in S} \pi_j = 1$$

Satz 52. *Falls die Markovkette irreduzibel und rekurrent ist und falls gilt $0 < \nu_j < \infty, \forall j \in S$, dann existiert ein invariantes Maß das eindeutig bis auf eine Konstante bestimmt ist.*
Falls die Markovkette irreduzibel und positiv rekurrent ist existiert eine eindeutig bestimmte stationäre Verteilung π wobei

$$\pi_j = \frac{1}{E_j(\tau_j(1))} = \frac{1}{m_j} \quad mit \quad m_j := E_j\tau_j(1)$$

Bemerkung 53. *(i) Die effektivste Methode zur Berechnung von m_j ist das Lösen des Gleichungssystems $\pi^t = \pi^t P$.*

(ii) Ohne Irreduzibilität kann die Eindeutigkeit nicht gewährleistet werden.

Beispiel 54 (Gamblers Ruin). *Sei eine Markovkette auf $\{0, 1, \cdots, m\}$ gegeben wobei $\pi = (\alpha, 0, \cdots, 0, 1-\alpha)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist und es gilt: $P[X_{n+1} = i+1|X_n = i] = p$, $P[X_{n+1} = i-1|X_n = i] = q$ und $p + q = 1$. Dann gilt:*

$$(\alpha, 0, \cdots, 0, 1-\alpha) = (\alpha, 0, \cdots, 0, 1-\alpha) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da die Gleichheit für alle α aus $[0, 1]$ gilt, ist zu sehen, dass keine eindeutige stationäre Verteilung vorliegt.

Beispiel 55. *Gegen sei eine Markovkette auf $\{0, 1, 2, 3\}$ wobei für alle α aus $[0, 1]$ die Gleichheit gilt:*

$$(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}) = (\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Daher gibt es keine eindeutige stationäre Verteilung aufgrund des Fehlens von Irreduzibilität.

Bemerkung 56. *Falls eine Markovkette irreduzibel und positiv rekurrent ist gilt:*

$$\frac{\pi_j}{\pi_i} = E_i \sum_{n=0}^{\tau_i(1)-1} 1_{[X_n=j]} = \nu_j$$

wobei ν_j definiert ist wie in Satz 6 beschrieben und der Ausdruck als die erwartete Anzahl von Besuchen bei j zwischen zwei besuchen bei i verstanden werden kann.

Definition 57. *Sei $f : S \to R$ und $f(k) = 1_{\{i\}}(k)$, $f(X_n) = 1_{\{X_n=i\}}(n)$ dann gilt insbesondere $f(k) = \delta_{ik}$ und*

$$lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} f(X_n)/N$$

kann sich als die durchnittliche Häufigkeit mit dem der Zustand i durchlaufen wird oder die Frequenz mit der der Zustand i über einen längeren Lauf hinweg kommt verstanden werden.

Satz 58. *Eine Markovkette sei irreduzibel und positiv rekurrent. Zusätzlich sei π eine eindeutige stationäre Verteilung, dann gilt:*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N} f(X_n)}{N} = \sum_{k\in S} f(k)\pi_k = \pi_i$$